

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

17. Band, Heft 9

12. April 1938

S. 385—432

## Geschichtliches.

● **Kowalewski, Gerhard: Große Mathematiker. Eine Wanderung durch die Geschichte der Mathematik vom Altertum bis zur Neuzeit.** München u. Berlin: J. F. Lehmann 1938. 300 S., 16 Taf. u. 35 Fig. RM. 10.20.

Das Buch verfolgt das Ziel, „die Mathematik durch geschichtliche und biographische Darbietungen dem weiten Kreise der Gebildeten näherzubringen. . . . Man kann auch als Laie ‚darin lesen‘ und die wenigen, ganz ausgesprochen mathematischen Abschnitte überschlagen. Es bleibt immer noch des Interessanten genug übrig“. In lebendigem und unterhaltendem Stil erzählt Verf. von dem Leben und Wirken einer Reihe großer Mathematiker. Ihre mathematische Leistung wird nur durch ausgewählte Proben erläutert. Entsprechend der aus dem Nachwort angeführten Zielsetzung ist Vollständigkeit weder bei der Auswahl der behandelten Persönlichkeiten noch bei der Besprechung ihrer Werke beabsichtigt. Die Ergebnisse der historischen Forschung der letzten Jahrzehnte läßt Verf. unberücksichtigt. Von dem Vorhandensein der hochentwickelten babylonischen Mathematik und ihrem Einfluß auf das Werden der griechischen erfährt der Leser nichts. Bei der griechischen wird u. a. behauptet, die Entdeckung des Irrationalen habe stets Falldiskussionen für rationale und irrationale Verhältnisse nach sich gezogen, während es doch gerade der Sinn der griechischen Irrationaltheorie ist, ausreichend umfassende Begriffsbildungen zu schaffen, um eine solche Fallunterscheidung zu vermeiden. Bei Descartes wird gesagt, er habe den Gebrauch rechtwinkliger (!) Koordinaten gelehrt; daß und warum seine Géométrie der Beginn eines neuen Zeitalters in der Wissenschaft des Abendlandes wurde, wird aber verschwiegen. Fast in jedem Kapitel findet der Kenner falsche oder doch von der neueren Forschung angezweifelte Angaben. Die mathematischen Entwicklungen werden in moderner Form vorgetragen, wie sie jedem, der heute ein wenig Mathematik studiert hat, unmittelbar zugänglich ist, nicht in der Form ihrer Entstehungszeit, deren Verständnis bekanntlich selbst dem Historiker der Mathematik zuweilen nicht geringe Schwierigkeiten verursacht. — Inhalt: 1. Rückblick auf Altertum und Mittelalter mit den Unterabschnitten: Thales von Milet, Anaximander, Pythagoras, Hippokrates von Chios, Eudoxos, Die erste alexandrinische Schule, Euklid, Archimedes, Apollonius, Die zweite alexandrinische Schule, Menelaus, Pappus, Diophant, Die byzantinische Schule, Moschopoulos. 2. Die Mathematik des Mittelalters. 3. Belebung der Mathematik durch Renaissance und Reformation mit den Unterabschnitten: Nicolò Fontana aus Brescia, Cardano, Rhäticus, Michael Stifel, Johann Faulhaber aus Ulm, Napier, Briggs. 4. Vorläufer von Newton und Leibniz mit den Unterabschnitten: Descartes, Fermat, Galilei, Huygens. 5. Die Begründer der Infinitesimalrechnung mit den Unterabschnitten: Newton, Leibniz. 6. Der weitere Ausbau der höheren Analysis mit den Unterabschnitten: Jakob I. und Johann I. Bernoulli, d'Alembert, Maclaurin, Euler, Lambert, Lagrange, Laplace, Monge, Pfaff, Gauß, Cauchy. *Bessel-Hagen* (Bonn).

● **Briefwechsel Cantor-Dedekind.** Hrsg. v. E. Noether und J. Cavaillès. (*Actualités scient. et industr. Nr. 518.*) Paris: Hermann & Cie. 1937. 61 pag. Frcs. 20.—.

This little book contains the mathematical parts of the correspondence between Dedekind and Cantor from April 1872 to November 1882. It was abstracted from the files of Dedekind. It is of interest as showing the evolution of Cantor's ideas. The principal topics discussed are: the non-denumerability of the real continuum; correspondences between continua of different dimensionality; and the definition of the second number class. There is an introduction (7 p.) by Cavaillès giving the main points of the historical background. *H. B. Curry.*

**Jelitai, József: Clairaut, La Condamine, d'Alembert und ihre Zeitgenossen nach den ungarischen Tagebüchern der Grafen Josef und Samuel Teleki.** Mat. fiz. Lap. 44, 173—198 u. deutsch. Zusammenfassung 198—199 (1937) [Ungarisch].

**Dittrich, Arnošt: Der Planet Venus und seine Behandlung im Dresdener Maya-Kodex.** S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1937, 326—355.



## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

**Lipka, Stephan:** Über das Produkt von Matrizen. Mat. természett. Értes. 56, Tl 2, 376—380 u. dtsh. Zusammenfassung 381 (1937) [Ungarisch].

**Barba, Guido:** Criteri per la costruzione di polinomi definiti. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 7, 36—39 (1937).

Verf. vervollständigt einige Resultate seiner vorigen Untersuchungen über definite Polynome (dies. Zbl. 16, 49, 147; 17, 97) und bietet einige neue Konstruktionsverfahren. N. Tschebotarow (Kasan).

**Barba, Guido:** Le trasformazioni di Tschirnausen ed i polinomi definiti. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 7, 69—72 (1937).

Das Polynom  $Q(x) = x^{2m} + p_{2m-1}x^{2m-1} + \dots + p_0$  mit  $p_{2k} = p_{2k-1}^2 + 1$  ist definit. — Man kann mit Hilfe der klassischen Methode für definite Polynome notwendige und hinreichende Kriterien aufstellen. — Eine beliebige (umkehrbare) Tschirnausensche Transformation führt definite Polynome in nicht indefinite (definite) Polynome über. N. Tschebotarow (Kasan).

**Tocchi, Luigi:** Sopra una semplificazione delle condizioni di Eulero-Sylvester-Bézout affinché due polinomi abbiano un M. C. D. di dato grado. Esercit. Mat., II. s. 10, 109—130 (1937).

I. Die Bedingung dafür, daß zwei Polynome einen größten (höchsten) gemeinsamen Teiler von bestimmtem Grade haben, wird hier mit Hilfe von Matrizen, die ähnlich wie Sylvesters dialytische Determinante aufgebaut sind, und ihres Ranges beantwortet. Die Ordnung der zu berechnenden Determinanten ist geringer als bei dem Verfahren von Sylvester. Auch läßt sich der gemeinsame Teiler selbst anschreiben. Eine kurze Wiedergabe der Ergebnisse ist nicht möglich. — II. Das Verfahren wird dann noch mit dem Bézoutschen Eliminationsverfahren in Verbindung gebracht und verglichen. L. Schrutka (Wien).

**Weitzenböck, R.:** Über Trivektoren. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 764—770 (1937).

**Weitzenböck, R.:** Über Trivektoren. III. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 851—857 (1937).

Ein einfacher Trivektor  $a_{ijh} = \xi_i \eta_j \zeta_h$  bestimmt eine Ebene in einer  $E_n$ . Es wird  $n \geq 6$  vorausgesetzt. Man betrachte nun die  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  als Koordinaten eines Punktes  $P_i$  in einem dreidimensionalen Raum. Die  $a_{ijk}$  werden dann Invarianten dieser Punkte, und die Relationen zwischen den  $a_{ijk}$  werden zu Syzygien zwischen diesen Invarianten. Die Syzygien erster Art ( $S_1$ ) findet man aus  $a_{[ijk} a_{l]mn} = 0$ , d. h. aus  $a_{[ijk} a_{lm]n} = 0$  (vgl. I., dies. Zbl. 17, 243). Es zeigt sich, daß  $\frac{5}{6} \binom{n}{5} (n+1)$  dieser Gleichungen linear unabhängig sind, die Anzahl der irreduziblen  $S_1$ . Eine Syzygie zweiter Art ( $S_2$ ) ist eine Linearform der irreduziblen Syzygien erster Art mit Koeffizienten, die von  $a_{ijk}$  abhängen, und die nicht identisch verschwindet in den irreduziblen  $S_1$ . Es wird gezeigt, daß man nur die folgenden Verbindungen zu berücksichtigen hat:

$$a_{uv[w} a_{ijk} a_{lm]n}; \quad a_{[ijk} a_{lm][n} a_{uvw]}. \quad (1)$$

Ausgehend von diesen Ausdrücken werden verschiedene Typen von  $S_2$  abgeleitet. In der dritten Arbeit betrachtet Verf. den Fall, daß  $n = 6$  ist. Durch Überschiebung mit der kovarianten  $n$ -Vektordichte kann man die Syzygien erster Art auf die Form  $D^h_{ij}$  bringen. Wegen  $D^h_h = 0$  gibt es 35 Syzygien erster Art. Für die Ausdrücke (1) kann man schreiben  $P_{nuv}$  und  $Q^{hij} = Q^h[ij]$ . Die Syzygien zweiter Art sind dann  $B_{uvw} = P_{uvw} + P_{vuw}$ ;  $C^{xyz} = Q^{xyz} + Q^{yxz}$ . Es wird die Anzahl der irreduziblen  $S_2$  abgeleitet.

J. Haantjes (Delft).



## Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

McKinsey, J. C. C.: A condition that a first Boolean function vanish whenever a second does not. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 694—696 (1937).

The condition is in terms of prime elements, where a prime element  $p$  of a Boolean algebra is one such that the only Boolean elements  $x$  such that  $xp = x$  are 0 and  $p$ . Then, the author shows, a necessary and sufficient condition that two Boolean functions  $\alpha_1 x + \alpha_2 x'$ ,  $\beta_1 x + \beta_2 x'$ , neither of which vanishes identically, should be such that one or the other is 0 for every  $x$ , is that  $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0$ , and  $\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2$  is prime. A generalization to functions of  $n$  variables is given. *H. B. Curry.*

Dubreil, Paul, et Marie-Louise Dubreil-Jacotin: Propriétés algébriques des relations d'équivalence. *C. R. Acad. Sci., Paris* 205, 704—706 (1937).

The authors consider the set of equivalence relations (equalities) of a set  $E$ . When two elements  $u$  and  $v$  are equivalent by a relation  $\mathfrak{R}$  one writes  $u \equiv v(\mathfrak{R})$ . If  $u \equiv v(\mathfrak{A})$  implies  $u \equiv v(\mathfrak{B})$  one says that  $\mathfrak{B}$  contains  $\mathfrak{A}$  and writes  $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ . This leads to the definition of union and cross-cut of equivalence relations, hence all equivalence relations form a structure. — If a set  $\bar{E}$  is homomorphic to  $E$ , then each equivalence relation in one set induces an equivalence relation in the other. If the absolute identity of  $\bar{E}$  induces a relation  $\mathfrak{P}$  in  $E$ , then one obtains corresponding to the first law of isomorphism, that all equivalences in  $\bar{E}$  form a structure isomorphic to the structure of those equivalences in  $E$  which contain  $\mathfrak{P}$ . Finally the authors define two equivalences  $\mathfrak{A}$  and  $\mathfrak{B}$  to be associable if their residue-classes are associated in a certain manner. For associable relations one can formulate a second law of isomorphisms.

*Oystein Ore (New Haven).*

Nakayama, Tadasi: Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern. *J. reine angew. Math.* 178, 11—13 (1937).

Let  $F$  be a field which is complete with respect to a discrete valuation and such that the residue class field  $F_0$  is not necessarily perfect. The author proves the existence of an unramified division algebra  $S$  over  $F$  for every prescribed residue class division algebra  $S_0$  over  $F_0$ . He shows  $S$  unique if  $S_0$  has a separable centrum over  $F_0$ . Moreover let  $D$  be any normal division algebra over  $F$ ,  $D_0$  have separable centrum  $Z_0$  over  $F_0$ . Then  $D$  is similar to  $S \times (\pi, Z, \sigma)$  where  $\pi$  is the prime element of  $F$ ,  $Z$  is an unramified cyclic field over  $F$  with residue class field  $Z_0$ ,  $S$  is an unramified division algebra over  $F$  with residue class algebra normal over  $F_0$ . *Albert (Chicago).*

Ward, Morgan: Some arithmetical applications of residuation. *Amer. J. Math.* 59, 921—926 (1937).

The author introduces certain new operations in commutative algebraic systems, particularly in Abelian groups, by means of analogies from the theory of residuation or construction of ideal quotients in principal ideal rings. These operations may perhaps best be illustrated in the ring of rational integers. If

$$a = \prod p_i^{\alpha_i}, \quad b = \prod p_i^{\beta_i}$$

are the prime factorisations of two integers then

$$(a, b) = \prod p_i^{(\alpha_i, \beta_i)}, \quad [a, b] = \prod p_i^{[\alpha_i, \beta_i]}, \quad a \cdot b = \prod p_i^{\alpha_i \cdot \beta_i},$$

where  $(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $[\alpha_i, \beta_i]$ ,  $\alpha_i \cdot \beta_i$  denote ordinary cross-cut, union and product. *Ore.*

## Zahlentheorie:

Dorwart, H. L., and O. E. Brown: The Tarry-Escott problem. *Amer. Math. Monthly* 44, 613—626 (1937).

Es handelt sich um die Lösung des Systems von Gleichungen  $\sum_{i=1}^s a_i^j = \sum_{i=1}^s b_i^j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) in ganzen Zahlen. Die Verff. geben eine Übersicht der bekannten, sich auf dieses Problem beziehenden Sätze (s. auch L. E. Dickson, *History of the*



theory of numbers II ch. XXIV). Einige neue Sätze für den Fall  $n = 2$  sind hinzugefügt. Anwendungen auf die Berechnung von Logarithmen und von  $\pi$ . *Beeger*.

**Chernick, Jack:** Ideal solutions of the Tarry-Escott problem. *Amer. Math. Monthly* 44, 626—633 (1937).

Diese Arbeit schließt sich an die vorhergehende an. Es ist bekannt, daß  $k + 1 \leq s$  ist. Hier wird nur der Fall  $k + 1 = s$  behandelt und für  $k \leq 7$  wird eine Lösung des Problems gegeben unter Benutzung der beiden Sätze: Ist  $(a_i; b_i)$  eine Lösung, dann ist auch  $(Ma_i + K; Mb_i + K)$  eine „äquivalente“ Lösung und  $(a_i, b_i + h; b_i, a_i + h)$  eine für  $2s$  und  $k + 1$ . Für den Fall  $k = 7$  wird z. B. ausgegangen von der Lösung  $(1 \dots 3w, 2w, w, -w, -2w, -3w; u, v, u+v, -u, -v, -u-v)$  für  $k=5$ . Dieses System läßt sich zurückführen auf die einzige Gleichung  $u^2 + uv + v^2 = 7w^2$ , von welcher eine Lösung mit 2 Parametern bekannt ist. Wählt man nun  $h = w$ , so folgt aus (1) die Lösung  $w, -3w, u + w, -u + w, v + w, -v + w, u + v + w, -u - v + w$ ;  $0, 4w, u, v, u + v, -u, -v, -u - v$  für  $k = 6$ . Für  $M = 2, K = u - w$  erhält man hieraus die Lösung  $u - 7w, u - 2v + w, 3u + w, 3u + 2v + w; u + 7w, u - 2v - w, 3u - w, 3u + 2v - w$  für  $k = 2, 4, 6$ . Nimmt man hierin jede Zahl auch noch mit entgegengesetztem Vorzeichen auf, so hat man eine Lösung (mit 2 Parametern) des Problems für  $k = 7$ . Es wird bewiesen, daß das Problem für  $k \leq 7$  eine unendliche Menge nichttrivialer, nichtäquivalenter Lösungen hat. *N. G. W. H. Beeger*.

**Pall, Gordon:** The quaternionic congruence  $\bar{t}at \equiv b \pmod{g}$  and the equation  $h(8n + 1) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . *Amer. J. Math.* 59, 895—913 (1937).

The author calls a rational quaternion  $t = t_0 + it_1 + jt_2 + kt_3$  integral if  $t_0, \dots, t_3$  are rational integers, and proper if  $t_0, \dots, t_3$  are coprime. Let  $4 \nmid h, h > 0, m > 0$ . Then all proper solutions  $x = ix_1 + jx_2 + kx_3$  of

$$hm^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (1)$$

are of the form  $x = \bar{t}at$ , where  $a = ia_1 + ja_2 + ka_3$  is a proper solution of

$$h = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad (2)$$

and  $t$  is a proper quaternion of norm  $N(t) = \bar{t}t = m$ . Denote by  $\Sigma(a)$  the set of solutions of (2) obtained from  $a$  by permutations of  $a_1, a_2, a_3$ , and changes of sign. For a divisor  $g$  of  $N(a)$  the author studies the residue classes  $\pmod{g}$  represented by  $\bar{t}at$  as  $t$  ranges over all integral quaternions and obtains the following theorem. Let  $h'$  be a positive divisor of  $h$  such that  $h/h' \equiv 1 \pmod{g}$ , e.g.  $h' = h$ . Let  $A$  denote the class of all residues  $\pmod{4h'}$  of proper solutions  $x$  of (1) obtained from a single proper set  $\Sigma(a)$  of solutions of (2), with  $m = 1, 5, 9, 13, \dots$ ; and let  $B$  denote the class of residues  $\pmod{4h'}$  obtained similarly with  $m = 3, 7, 11, 15, \dots$ . Then: (a) the classes  $A$  and  $B$  are mutually exclusive; (b) if  $h'$  has no factor  $> 1$  of the form  $8f + 1$ , then all proper solutions of  $h(8n + 1) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$  belong to  $A$  or  $B$ , and for any  $n$  such that  $(8n + 1)h/h'$  is not a square, this equation has equally many solutions in each class  $A, B$ . For  $h = 1, 3$  this is related to certain results obtained from theta-function expansions by Jacobi and Glaisher (see Dickson, *History of the Theory of Numbers* II, 262, 268). The theorem yields as corollaries results concerning other ternary quadratic forms. *Hull (Urbana)*.

**Mordell, L. J.:** The representation of a definite quadratic form as a sum of two others. *Ann. of Math.*, II. s. 38, 751—757 (1937).

Verf. behandelt das folgende Problem: „ $f(x) = \sum_{h,k=1}^n a_{hk} x_h x_k$  sei eine positiv-definite quadratische Form in  $n$  Veränderlichen mit ganzen rationalen Koeffizienten; gibt es eine Zerlegung  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  von  $f(x)$  in eine Summe ganzzahliger positiv-definiten oder semidefiniten Formen?“ Mittels der Reduktionstheorie der quadratischen Formen zeigt Verf., daß eine solche Zerlegung für  $n \leq 5$  stets möglich ist und daß für ein festes  $n \geq 6$  nur höchstens endlich viele Formenklassen unzerlegbar sein können.



Für  $n = 6$  ist die Form der Diskriminante 3

$$\sum_{h=1}^6 x_h^2 - \left( \sum_{h=1}^6 x_h \right)^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_6$$

unzerlegbar, während für  $n = 7$  eine unzerlegbare Form der Diskriminante 2, für  $n = 8$  eine solche der Diskriminante 1 existieren. S. auch eine Arbeit von Chao Ko (dies. Zbl. 16, 390).

Mahler (Manchester).

**Turski, Stanislaw:** Eine Bemerkung zur additiven Zahlentheorie. Ann. Soc. Polon. math. 15, 165—167 (1937).

By means of a theorem of Schnirelmann, the author proves that, for every positive integer  $k$ , there exists a number  $j(k)$  such that every positive integer is the sum of at most  $j(k)$  odd  $k$ -th powers.

Wright (Aberdeen).

**Wright, E. Maitland:** The representation of a number as a sum of four „almost equal“ squares. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 278—279 (1937).

Ist  $n \not\equiv 0 \pmod{8}$ , dann gibt es ganze  $x_1, \dots, x_4$  derart, daß

$$n = x_1^2 + \dots + x_4^2, \quad |n - 4x_i^2| = O(n^{1/4}) \quad \text{für } i = 1, \dots, 4.$$

Verf. zeigt, daß in dieser Formel  $O$  nicht durch  $o$  ersetzt werden kann. Allgemeiner:

Ist  $k \geq 2, s \geq 1, m > 0$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi(m) = 0, n = s(m^K + Km^{K-1}), |n - sx_i^K| \leq m^{K-1} \psi(m)$ , für  $i = 1, \dots, s$ , so gilt für hinreichend große  $m$

$$n \neq x_1^K + \dots + x_s^K. \quad \text{Hans Heilbronn (Cambridge).}$$

**Hua, Loo-Keng:** On the representation of integers as the sums of the  $k^{\text{th}}$  powers of primes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 17, 167—168 (1937).

Es sei  $k \geq 20$ , ganz;  $a = k^{-1}$ ;  $b = 18k^3 \log k$ ;  $m = \left\lfloor \frac{\log \frac{1}{2} b + \log(1 - 2a)}{\log\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)} \right\rfloor$ ;

$c = \left\lfloor \frac{1}{2} b(k-2)(1-a)^{m+1} \right\rfloor + 1$ ;  $t = \text{Max}(c, 4k)$ ;  $s \geq 2(t+m) + 7 \sim 6k \log k$ .

Es sei  $K = 2^{1+(-1)^k} k \prod_{p-1|k} p$ . Dann ist jedes große  $N \equiv s \pmod{K}$  in der Form

$N = p_1^k + \dots + p_s^k$  darstellbar. Der Beweis wird skizziert. Hans Heilbronn.

**Ingham, A. E.:** On the difference between consecutive primes. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 255—266 (1937).

It was proved by Hoheisel, S.-B. Berlin. Math. Ges. 1930, 580—588, that there is an absolute constant  $\theta < 1$  such that  $p_{n+1} - p_n = O(p_n^\theta)$ , where  $p_n$  is the  $n^{\text{th}}$  prime. The main result of this paper is that, if  $\zeta(\frac{1}{2} + it) = O(t^\epsilon)$ , then we may take  $\theta = (1 + 4c)/(2 + 4c) + \epsilon$ . Thus the Hardy-Littlewood value  $c = \frac{1}{6} + \epsilon$  gives  $\theta = \frac{5}{8} + \epsilon$ . The unproved Lindelöf hypothesis that  $c = \epsilon$  would give  $\theta = \frac{1}{2} + \epsilon$ . The result depends on a new estimation of the number  $N(\sigma, T)$  of zeros  $\beta + i\gamma$  of  $\zeta(s)$  for which  $\beta \geq \sigma, 0 < \gamma \leq T$ , namely  $N(\sigma, T) = O(T^{2(1+2c)(1-\sigma)} \log^5 T)$ . It is also proved that  $N(\sigma, T) = O(T^{(1+2c)(1-\sigma)} \log^5 T)$  for  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ . These results depend

in turn on estimations of  $I_\sigma(T) = \int_0^T |f_\sigma(\sigma + it)|^2 dt$ , where  $f_\sigma(s) = \zeta(s) \sum_{n < x} \mu(n) n^{-s} - 1$ .

The author uses the fact that the order in  $T$  of  $I_\sigma(T)$  is a convex function of  $\sigma$ .

E. C. Titchmarsh (Oxford).

**Vinogradov, I.:** A new estimation of a certain sum containing primes. Rec. math. Moscou 44, 783—791 u. engl. Zusammenfassung 792 (1937) [Russisch].

If  $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, (a, q) = 1, -1 \leq \theta \leq 1, Q \leq q \leq N/Q, 0 < k \leq Q^{\frac{1}{2}}, \epsilon > 0 (a, q, k \text{ integers}),$  then

$$\sum_{p \leq N} e(\alpha kp) = O(NQ^{-\frac{1}{2} + \epsilon} \log N) \quad [e(\omega) = e^{2\pi i \omega}, p \text{ prime}]$$

(uniformly except in  $\epsilon$ ); and  $Q^{-\frac{1}{2} + \epsilon}$  can be replaced by  $Q^{-\frac{1}{2} + \epsilon}$  when  $k = 1$ . For an account of the author's estimation of this sum for  $k = 1, |\theta| \leq qQ/N, Q = (\log N)^{3h} (3h > 0)$ , and its application to the minor arcs in Goldbach's problem, reference should



be made to this Zbl. 16, 291, and 17, 198. [In the first of these reports read  $\tau = N(\log N)^{-3h}$  in the third line, and  $e^{2\pi i m x y \alpha}$  in the definition of  $T$ ; these corrections are made with the concurrence of the referee.] The above improvement for larger  $Q$  is based on a more elaborate dissection of the  $O(\log N)$  sums  $\Sigma_r = \sum_{n, p_1, \dots, p_r} e(\alpha k n p_1 p_2 \dots p_r)$

$[p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq \sqrt{N}, n p_1 p_2 \dots p_r \leq N' (= N \text{ here})]$  before the application of the author's lemma on double trigonometrical sums  $T = \sum_{x, y} e(\alpha m x y)$ . The part

$p_1 \dots p_r \leq q/2k$  of  $\Sigma_r$  is disposed of (trivially) by summation first over  $n$ , and a part  $q/2k < p_1 \dots p_r \leq \xi$  is estimated by direct application of the lemma with  $x = p_1 \dots p_r, y = n$  (and  $\tau = q, m = k$ ). The remaining part  $p_1 \dots p_r > \xi$  is divided into  $[N/\xi]$  parts corresponding to the different values of  $n$  ( $0 < n \leq N/\xi$ ), and each of these is subdivided into  $O((r+1)^{t-1})$  sums in which each  $p_j$  is restricted to one of the intervals  $(\lambda_{s-1}, \lambda_s)$  ( $s = 1, \dots, t$ ), where  $\lambda_0 = 2, \lambda_s = \lambda_{s-1}^{1+\varepsilon}, \lambda_{t-1} < \sqrt{N} \leq \lambda_t$ . To each of these last sums the lemma is applied with  $p_1 \dots p_r = x \cdot y$  (and  $m = kn, N_1 = N/n$ ), where  $x$  is a product of  $p_j$  with definite suffixes (the same for all terms of any one sum) chosen to make every  $x$  lie in a certain interval  $\eta < x \leq N/n\eta$ . [Those sums in which the dissection  $p_1 \dots p_r = x \cdot y$  cannot be made without separating  $p_j$  belonging to the same interval  $(\lambda_{s-1}, \lambda_s)$  are adjusted so as to make the  $x$  and  $y$  in  $T$  range over independent sets of integers, except for a condition  $N'/x < y \leq N_1/x$ .]

The result is obtained by choice of  $\xi$  and  $\eta$  on the assumption that  $Q \geq e^{(\log N)^{\frac{1}{2}}}$ . Below this limit the original method is applicable (the author asserts). *Ingham* (Cambridge).

**Vinogradov, I. M.:** New estimations of trigonometrical sums containing primes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 17, 165—166 (1937).

Verf. gibt die folgenden Verschärfungen seiner früheren Ungleichungen über Exponentialprimzahlsummen: 1. Es sei  $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, (a, q) = 1, 0 < q \leq N, Q = \text{Min}\left(q, \frac{N}{q}\right), 1 \leq m \leq Q^t$ . Dann ist

$$\left| \sum_{p \leq N} e^{2\pi i m \alpha p} \right| = O(NQ^{-t+\varepsilon} \log N),$$

wo im Falle  $m = 1$  der Exponent  $-\frac{1}{6} + \varepsilon$  durch  $-\frac{1}{4} + \varepsilon$  ersetzt werden darf. 2. Hieraus folgt, daß es

$$\varrho \pi(N) + O(NQ^{-t+\varepsilon} \log^2 N)$$

Primzahlen  $\leq N$  gibt, für die  $\alpha p - [\alpha p] < \varrho < 1$  ist. 3. Es sei  $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, (a, q) = 1, k > 1, 0 < q \leq N^k, Q = \text{Min}\left(q, \frac{N^k}{q}\right), f(p) = \alpha p^k + \alpha_{k-1} p^{k-1} + \dots + \alpha_0$ .

Dann gibt es ein  $\sigma = \sigma(k) > 0$  derart, daß  $\sigma$  nur von  $k$  abhängt und daß für  $1 \leq m \leq Q^{2\sigma}$

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i m f(p)} = O(NQ^{-\sigma}).$$

4. Hieraus folgt, daß es  $\varrho \pi(N) + O(NQ^{-\sigma} \log N)$  Primzahlen  $\leq N$  gibt, für die

$$f(p) - [f(p)] < \varrho < 1 \text{ ist.} \quad \text{Hans Heilbronn.}$$

**Chowla, S.:** On a trigonometric sum. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 6, 291—292 (1937).

Verf. zeigt: Ist  $\varphi$  eine reelle irrationale Zahl mit beschränkten Kettenbruchennennern, so ist  $\sum p^{-1} e^{2\pi i p \varphi}$  konvergent, wenn  $p$  alle Primzahlen durchläuft. Der Beweis beruht auf einer Vinogradovschen Abschätzung über Exponentialprimzahlsummen.

*Hans Heilbronn* (Cambridge).

**Corput, J. G. van der:** Sur deux, trois ou quatre nombres premiers. (I. comm.) Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 846—851 (1937).

Verf. zeigt in dieser Arbeit, daß sich fast alle Zahlen durch eine der Formen  $p_1 \pm p_2, p_1 \pm p_2^2 \pm p_3^2, p_1^2 + p_2^2 \pm p_3^2 \pm p_4^2$  darstellen lassen, falls nur die notwendigen Kongruenzen mod 24 erfüllt sind. Es wird sogar gezeigt, daß fast alle Zahlen einer arithmetischen Progression höherer Ordnung darstellbar sind, falls nur die notwendigen Kongruenzen mod 24 erfüllt sind.

*Hans Heilbronn* (Cambridge).



**Davenport, H.:** On some infinite series involving arithmetical functions. II. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 313—320 (1937).

In the previous paper, this Zbl. 16, 201, it was shown that

$$\sum_1^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \{n\theta\} = -\frac{1}{\pi} \sin 2\pi\theta,$$

where  $\{t\} = t - [t] - \frac{1}{2}$ , holds for rational  $\theta$ , and also for almost all  $\theta$ . In this paper, using deeper methods based on Vinogradov's recent work on the theory of primes, it is shown that the series in fact converges uniformly in  $\theta$  to the sum stated.

*E. C. Titchmarsh* (Oxford).

## Gruppentheorie.

**Hausmann, B. A., and Oystein Ore:** Theory of quasi-groups. Amer. J. Math. 59, 983—1004 (1937).

Diese Arbeit ist der Untersuchung multiplikativer Mannigfaltigkeiten gewidmet. Einerseits werden Bedingungen für die Gültigkeit der die Zerlegung einer Gruppe nach einer Untergruppe betreffenden Sätze gesucht; es stellt sich heraus, daß je nach der Schärfe des gewünschten Satzes eine entsprechend scharfe Formulierung des Assoziativgesetzes für ihn charakteristisch ist. Andererseits werden für endliche derartige Mannigfaltigkeiten, in denen die Zerlegungssätze gelten, die Analoga des Hauptreihen-, Kompositionsreihensatzes sowie des direkten Produktzerlegungssatzes aus entsprechenden Sätzen der Theorie der Verbände hergeleitet. (Vgl. O. Ore, On the foundations of abstract algebra. I and II. Ann. of Math. 36, 406—437 (1935) u. 37, 265—292 (1936); dies. Zbl. 12, 5 u. 14, 197.)

*Reinhold Baer.*

**Vandiver, H. S.:** On the concept of co-sets in a semi-group. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 552—555 (1937).

Es werden Nebengruppen in einer Halbgruppe  $S$  nach einer in  $S$  enthaltenen Gruppe  $G$  betrachtet, deren Einheitsselement zum mindesten einseitiges Einheitsselement von  $S$  ist. Es zerfällt  $S$  in solche Nebengruppen, und verschiedene Nebengruppen haben kein Element gemeinsam. Die Anzahl der Elemente in einer Nebengruppe braucht aber nicht mit der Ordnung von  $G$  übereinzustimmen; diese Anzahl ist ein Teiler der Ordnung von  $G$ , falls  $G$  endliche Ordnung hat. Ist  $S$  kommutativ, und multipliziert man ein Repräsentantensystem  $C_1, C_2, \dots, C_k$  von  $S$  modulo  $G$  mit einem festen Element  $M$  von  $S$ , so kann man die entstehenden Elemente in der Form  $a_n C_n$  mit  $a_n$  in  $G$  darstellen. Sind die  $C_n$  kürzbare Elemente von  $S$ , so folgt  $M^k = a_1 a_2 \dots a_n$ . Das Gaußsche Lemma in der Theorie der quadratischen Reste ist ein Spezialfall dieser Regel.

*R. Brauer* (Toronto).

**Murnaghan, F. D.:** The characters of the symmetric group. Amer. J. Math. 59, 739—753 (1937).

Es werden explizite Formeln für diejenigen Charaktere der symmetrischen Permutationsgruppe  $\mathfrak{S}_n$  gegeben, die zu Partitionen von  $n$  in höchstens vier Summanden gehören; diese Formeln werden an zahlreichen Spezialfällen erläutert. Ist bei einer Partition ein Summand 1, so kann man den Charakter leicht auf einfachere Fälle zurückführen. Die angegebenen Formeln reichen daher aus, alle Charaktere für  $n \leq 11$  anzugeben. Im Fall  $n = 16$  liefern sie 90 von den 231 einfachen Charakteren. *Brauer.*

**Brauer, Richard:** On algebras which are connected with the semisimple continuous groups. Ann. of Math., II. s. 38, 857—872 (1937).

Ist  $\mathfrak{G}$  eine Gruppe von linearen Transformationen  $G$  der Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , so werden die linearen Transformationen der Komponenten eines Tensors vom Rang  $f$  mit  $M_f(G)$  bezeichnet und bilden eine Darstellung von  $\mathfrak{G}$ .  $A_f$  sei die Algebra, welche von den  $M_f(G)$  erzeugt wird. Ist  $\mathfrak{G}$  die volle lineare Gruppe, so werden die Matrizen von  $A_f$  durch Symmetriebedingungen charakterisiert. Für die orthogonalen Gruppen



war eine solche Kennzeichnung bisher nicht vorhanden. Verf. behandelt zunächst die Algebra  $B_f$ , welche die mit allen Elementen von  $A_f$  vertauschbaren Matrizen enthält. Die Elemente von  $B_f$  werden zu Invarianten von  $\mathfrak{G}$ , welche  $2f$ -fach linear in den Komponenten  $x_i(q)$  von  $f$  kovarianten und  $u^i(q)$  von  $f$  kontravarianten  $n$ -dimensionalen Vektoren sind, in umkehrbar eindeutige Beziehung gebracht. Ist  $A_f$  halbeinfach, also auch  $B_f$ , so enthält  $A_f$  genau die mit allen Elementen von  $B_f$  vertauschbaren Matrizen. Die Bedingung ist mit der vollen Reduzibilität der Darstellung  $M_f$  gleichwertig, welche ja für halbeinfache kontinuierliche Gruppen überm Körper der reellen oder komplexen Zahlen statthat. Verf. beweist sie auch für Orthogonal- und Komplexgruppen über einem beliebigen Grundkörper der Charakteristik 0. — Kennt man  $A_f$ , wie bei den linearen Gruppen, so läßt sich aus der Beziehung ein Beweis für das Fundamentalproblem der Invariantentheorie dieser Gruppen ableiten. — Im letzten Abschnitt werden die Systeme  $B_f$  und  $A_f$  für die eigentlichen und die uneigentlichen orthogonalen Gruppen und für die Komplexgruppen genauer untersucht und die Bedingungen dafür angegeben, daß eine Matrix in  $A_f$  liegt. Für die Komplexgruppen erhält man wieder das Ergebnis von H. Weyl (dies. Zbl. 4, 52), welches dort jedoch mit Benutzung der Darstellungstheorie gewonnen wurde. *Landherr* (Rostock).

**Livenson, E.:** An example of a non-closed connected subgroup of the two-dimensional vector space. *Ann. of Math.*, II. s. 38, 920—922 (1937).

Entgegen einer Behauptung von Freudenthal (*Ann. of Math.* 37, 59; dies. Zbl. 13, 202) gibt es zusammenhängende Untergruppen eines Vektorraumes, die nicht abgeschlossen sind. *van der Waerden* (Leipzig).

**Le Roux, J.:** La définition analytique de l'égalité en géométrie. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 205, 1351—1353 (1937).

Wenn bezüglich der Lieschen Gruppe  $G$  die Punktepaare eine und nur eine Invariante besitzen und wenn die Invarianten eines  $n$ -Tupels von Punkten durch die Invarianten seiner Punktepaare bestimmt sind, so ist  $G$  eine projektive Gruppe.

*Kurt Reidemeister* (Marburg a. d. L.).

**Schaaacke, Ingeburg:** Zwillingsbildung als gittergeometrisch-zahlentheoretisches Problem mit Anwendung auf einige reale Fälle. I. *Z. Kristallogr.* A 98, 143—167 (1937).

Als Weiterführung der Arbeiten von Liebisch und Leonhardt wird eine allgemeingültige, geometrische Grundlage gegeben, die gestattet, mit einfachsten Mitteln die geometrischen Beziehungen zwischen den Gitterelementen der Partner eines Zwillings aufzusuchen. Es werden mit Hilfe des reziproken Gitters am verzwillingten, einfach primitiven Translationsgitter Gesetzmäßigkeiten abgeleitet, die im allgemeinen Sinne erhalten bleiben, wenn man vom Punktgitter zur realen Kristallstruktur übergeht, wobei die in der Arbeit behandelten Fälle von Zwillingsbildungen bemerkenswerte Zusammenhänge mit der Zahlentheorie aufweisen: Es werden diejenigen Netzebenen als Zwillingsebenen im math. Punktgitter zusammengefaßt, auf denen zugleich eine Gittergerade senkrecht steht. Die so erzeugten Zwillinge können durch eine ganze Zahlengröße  $q$  — die Zwillingsordnung — charakterisiert werden. Sie gibt den Inhalt des kleinsten, übergeordneten Parallelepipeds an, in dessen Eckpunkten sich gleichzeitig Punkte beider Gitter befinden, und hat im kubischen Fall, der vorerst nur behandelt wird, die Form  $q = N_z/p_1^{r_1} = 1 \cdot p_2^{r_2} \cdot p_3^{r_3} \cdot \dots \cdot p_n^{r_n}$ , wobei  $N_z$  gleich der Summe von drei Quadratzahlen,  $r_i \geq 0$  ganz und die  $p_i$  die Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge sind (kanonische Zerlegung). Die Kombinationen der Teiler von  $q$  in gesetzmäßiger Verknüpfung erweisen sich ebenfalls als bedeutungsvoll. *W. Nowacki*.

**Schaaacke, Ingeburg:** Zwillingsbildung als gittergeometrisch-zahlentheoretisches Problem mit Anwendung auf einige reale Fälle. II. *Z. Kristallogr.* A 98, 211—232 (1937).

In dieser Arbeit (I. vgl. vorsteh. Ref.) wird neben der abschließenden Behandlung des tetr., rho. und hex. Gitters der Zusammenhang der Gittergeometrie der Zwillinge mit der Zahlentheorie näher behandelt: Man kann die gesamte Geometrie



der verzwilligten Punktgitter rechnerisch aus dem Symbol des Zwillingselementes gewinnen (kanonische Zerlegung von  $N_x = h_x^2 + k_x^2 + l_x^2$ ; Teiler der Zwillingsordnung  $q$ ). Es wird die Klassifikation der zerlegbaren  $N$  in vier Klassen besprochen: 1.  $N_1$  mit einem Tripel  $(xy0)$ , worin  $x, y \geq 0$ ; 2.  $N_2 - (x, y, x+y)$  mit  $x, y \geq 0$ ; 3.  $N_3 - (xxy)$  mit  $x, y \geq 0$ ; 4.  $N$  alle anderen, die kanonische Zerlegung und die anschaulich-geometrische Interpretation in der Geometrie der Zwillinge angeben. Hierauf wird noch die Geometrie der Zwillinge, welche keine Beziehungen zur Zahlentheorie aufweisen, diskutiert.

W. Nowacki (Bern).

## Analysis.

Uhler, Horace S.: Log  $\pi$  and other basic constants. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 23—30 (1938).

Pflanz, E.: Einige Folgerungen aus einem Satz der Interpolationsrechnung. Jb. Deutsch. Math.-Verein. 47, Abt. 1, 193—197 (1937).

Für die Summe

$$\sum_{\varrho=1}^p \frac{(-1)^{\varrho+1}}{(p+\varrho)!(p-\varrho)! \varrho^{2k}}$$

wird eine Darstellung in Gestalt einer  $K$ -reihigen Determinante gegeben, die als Elemente nur gewisse kombinatorisch definierte Größen  $C_k$  enthält. Dabei sind  $K$  und  $p$  als positiv ganzzahlig und  $p > K$  vorausgesetzt. Für den Zusammenhang zwischen

$\sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho^{2k}}$  und  $\sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho^2}$  wird ein neuer Beweis gegeben.

Collatz (Karlsruhe).

Schönberg, M.: Sulla funzione  $\delta(x)$  di Dirac. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 81—83 (1937).

This paper calls attention to the following two facts: 1. If  $\Phi(x) = -\frac{1}{2}, x < 0$ ;  $= 0, x = 0$ ;  $= \frac{1}{2}, x > 0$  and  $f(x)$  is continuous then  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\Phi(\xi - x)$ , the integral being a Stieltjes integral. If  $\delta(x)$  is the Dirac "function" this formula serves to replace the formula  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(\xi - x) d\xi$ . 2. If  $f(x)$  possesses a continuous derivative at the point  $x$  and  $\Psi(\eta, \xi) = \frac{\Phi(\eta - \xi) - \Phi(\eta)}{\xi}, \xi \neq 0; \Psi(\eta, 0) = 0$  then  $f'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Phi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\Psi(\eta - x, \xi)$ . This formula serves to replace the formula  $f'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \delta'(x - \eta) d\eta$ .

Murnaghan (Baltimore).

Schönberg, M.: Sulla funzione  $\delta(x)$  di Dirac. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 151—153 (1937).

In this paper (I. see the prec. review) it is shown that if a function  $f(x)$  possesses a continuous derivative of the  $n^{\text{th}}$  order this derivative may be presented as a repeated Stieltjes integral:  $f^n(x) = \int d\Phi(\xi) \int f(\eta) d_n \psi_n(\eta - x, \xi)$  where  $\Phi(x)$  is the unit function:  $\Phi(x) = -\frac{1}{2}, x < 0$ ;  $\Phi(x) = 0$ ;  $\Phi(x) = \frac{1}{2}, x > 0$  and

$$\xi^n \psi_n(\eta, \xi) = \Phi(n\xi - \eta) - n\Phi(n-1\xi - \eta) + \dots + (-1)^n \Phi(\eta).$$

The impossibility of representing  $f'(x)$  in the form  $\int f(\xi) dF(\xi - x)$  is shown.

Murnaghan (Baltimore).

Ganapathy Iyer, V.: Some uniqueness theorems for functions of class  $L_p$ . J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 324—331 (1937).

L'A. trait le problème suivant, qui généralise le problème des moments: Dé-



terminer la fonction  $f$  vérifiant les conditions  $d_n = \int_a^b f(x) \Phi_n(x) dx$ , où la suite  $\{c_n\}$  et la suite de fonctions  $\{\Phi_n\}$  sont données. Voici un des théorèmes établis par l'auteur: Soit  $g(z) = \sum c_n z^{n_i}$  une fonction entière d'ordre un, et du type non supérieur à un ( $\lim_{r \rightarrow \infty} \log \max_{|z|=r} |g(z)|/r \leq 1$ ). Supposons que  $\sum 1/n_i = \infty$  et que  $|g(iy)| < M$  ( $-\infty < y < \infty$ ). Soit  $\{\lambda_n\}$  une suite mesurable de densité  $D > 0$  et d'indice de condensation nul (pour la terminologie voir VI. Bernstein, séries de Dirichlet, Col. Borel, 1933, voir ce Zbl. 8, 115). Si  $f(x)$  est intégrable (L) dans  $(-a, +a)$  avec  $a < \pi D$ , si  $d_n = O(|\lambda_n|^k) (\lambda_{-n} = \lambda_n)$  et si  $d_n = \int_a^b f(x) g(\lambda_n x) dx$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $f(x)$  est identiquement nulle dans  $(-a, a)$ .  $-a$  Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Mandelbrojt, S.: Remarques sur certaines classes de fonctions. Bull. Sci. math., II. s. 61, 262—268 (1937).

Let  $C_{\{A_n\}}^*$  be the class of functions  $f(x)$  introduced by Paley and Wiener such that for some  $K$  (depending upon  $f$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)|^2 dx < K^2 A_n^2. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

The author determines a sufficient condition in order that  $C_{\{B_n\}}^* \subset C_{\{A_n\}}^*$ . To a given sequence of positive numbers  $\{c_n\}$  determine a sequence  $\{\bar{c}_n\}$  by the conditions (I)  $\log \bar{c}_n$  is convex, (II)  $\bar{c}_n \leq c_n$  for all  $n$ , and (III)  $\bar{c}_n$  is the largest quantity satisfying the previous conditions. In terms of this notation the condition is simply  $\sqrt[n]{\bar{B}_n} = O(\sqrt[n]{A_n})$ . E. Hille (New Haven, Conn.).

Karamata, J.: Un théorème relatif aux sommabilités de la forme  $\sigma \int_0^{1/\sigma} \psi(\sigma t) s(t) dt$ . Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême 1936, Nr 19, 1—5 (1937).

Let  $\psi(t)$  be of constant sign and  $k$  times differentiable in  $0 \leq t \leq 1$ , let

$$\psi^{(\nu)}(1) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, k-2, \quad \psi^{(k-1)}(1) \neq 0,$$

$$\int_0^1 |\partial^k \psi(t)| dt < |\psi^{(k-1)}(1)|,$$

where  $\partial = t \frac{d}{dt}$  and  $\partial^0 \psi(t) = \psi(t)$ . Then

$$\frac{1}{x} \int_0^x \psi\left(\frac{t}{x}\right) s(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

together with

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq t' \leq \lambda t} \{s(t') - s(t)\} = -w(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{as } \lambda \rightarrow 1$$

imply that  $s(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ . E. Hille (New Haven, Conn.).

Karamata, J.: Über einen Satz von H. Heilbronn und E. Landau. Publ. Math. Univ. Belgrade 5, 28—38 (1936).

Betreffend den Satz von Heilbronn und Landau siehe dies. Zbl. 6, 196. Verf. beweist: I. Sei  $K(u)$  reell,  $K(u) = 0$ ,  $u < 0$  und

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-su} K(u) du, \quad \text{konvergent für } \sigma > 0,$$

samt  $\varphi_\sigma(t) = \Re[F(\sigma + it)]$ . Ist  $|\varphi_\sigma(t)| < M$  für  $0 < \sigma < \sigma_0$ ,  $|t| < 2\lambda$ , und für irgendein  $c \geq 0$

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \min_{u \leq u' \leq u+\lambda} e^{-cu} [e^{cu'} K(u') - e^{cu} K(u)] = -w(h)$$

mit  $0 < w(h) \rightarrow 0$  bei  $h \rightarrow 0$ , so ist  $\limsup_{u \rightarrow \infty} |K(u)| < \Omega(\lambda) \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . II. Aus

$\varphi_\sigma(t) < M$  und  $K(0) = 1$ ,  $K(u') - K(u) > -1$  für  $0 < u \leq u' \leq u+1$  folgt  $K(u) = O(1)$ ,  $u \rightarrow \infty$ . E. Hille (New Haven, Conn.).



### Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

**Privaloff, I.:** Quelques remarques sur la théorie des familles normales de fonctions continues. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 739—744 u. franz. Zusammenfassung 744 (1937) [Russisch].

Soit  $D$  un espace à  $n$  dimensions et  $\{f(M)\}$  une famille de fonctions continues dans  $D$ . Pour que cette famille soit normale il faut que: a) quel que soit le domaine fermé  $\bar{G} < D$ , il existe une constante  $C = C(\bar{G})$  telle que toute  $f$  de la famille vérifie l'inégalité  $f(P) < C$ ,  $P \in \bar{G}$ ; b) à chaque  $\delta > 0$  et  $\bar{G}$  on puisse faire correspondre un  $\varepsilon > 0$  tel que

$$d[f_\varepsilon(P), f(P)] < \delta, \quad P \in \bar{G}$$

où  $f_\varepsilon(P) = [\omega(\varepsilon)]^{-1} \int_{\omega(P; \varepsilon)} f(M) d\omega$ ,  $d[a, b] = \arcsin |a - b| [(a^2 + 1)(b^2 + 1)]^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\omega(P, \varepsilon)$

étant la sphère de rayon  $\varepsilon$  autour de  $P$ . La condition a) et la condition b'):  $|f_\varepsilon(P) - f(P)| < \delta$ , suffisent pour que la famille soit normale. *Mandelbrojt.*

**Lorentz, G.:** Zur Theorie der Polynome von S. Bernstein. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 543—556 (1937).

Quelques nouveaux résultats relatifs à la théorie des polynomes de S. Bernstein

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \binom{n}{m}.$$

1° Si une fonction bornée  $f(x)$  possède au point  $x = x_0$  une dérivée d'ordre  $r$   $f^{(r)}(x_0)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(r)}(x_0) = f^{(r)}(x_0).$$

2° Il s'ensuit immédiatement une propriété déjà connue des polynomes de L. Kantorovitch [associés à toute fonction sommable  $f(x)$ ]

$$K_n(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m \alpha^m (1-x)^{n-m} (n+1) \int_{\frac{m}{n+1}}^{\frac{m+1}{n+1}} f(t) dt.$$

Soit  $F(x)$  une intégrale indéfinie de la fonction  $f(x)$ ,  $x_0$  un point où la dérivée  $F(x_0)$  existe et est égale à  $f(x_0)$ ; alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x_0) = f(x_0)$ . 3° En posant

$$\|\varphi\| = \int_0^1 |\varphi(t)| dt,$$

on a, pour toute fonction sommable  $f(x)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n(x) - f(x)\| = 0.$$

4° Pour qu'une fonction  $f(x)$  [ne possédant que des discontinuités de première espèce  $x_0$  telles que  $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$ ] soit à variation bornée, il faut et il suffit que les polynomes  $B_n(x)$  correspondants. Soient à variation bornée. 5° Pour qu'une fonction  $f(x)$  soit absolument continue, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varlimsup_{0 \leq x \leq 1} [f(x) - B_n(x)] = 0.$$

Applications à l'étude de certains espaces fonctionnels. *W. Gontscharoff* (Moscou).

**Walsh, J. L., and W. E. Sewell:** Note on the relation between continuity and degree of polynomial approximation in the complex domain. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 557—563 (1937).

The authors prove two theorems stating a Lipschitz condition for a certain derivative of an analytic function if the accuracy of the approximation by polynomials of a preassigned degree is of a certain given order. — Let  $C$  be an analytic Jordan curve, and let  $f(z)$  be defined in the closed interior of  $C$ . If a sequence of polynomials  $p_n(z)$  of the respective degree  $n$ , exists, such that  $|f(z) - p_n(z)| < M n^{-p-\alpha}$  when  $z$  is in the closed interior of  $C$ ,  $p \geq 0$  integer,  $0 < \alpha < 1$ , then  $f(z)$  is analytic



in the interior of  $C$ , and  $f^{(p)}(z)$  is continuous on  $C$  and satisfies a condition of the form

$$|f^{(p)}(z_1) - f^{(p)}(z_2)| < L|z_1 - z_2|^\alpha;$$

here  $z_1$  and  $z_2$  are on  $C$ . This holds also for  $\alpha = 1$ , if the factor  $|\log|z_1 - z_2||$  is added to the righthand member. — Another theorem of similar kind is obtained by replacing  $C$  by a closed set  $E$ , whose complement  $K$  is connected, and the order of approximation by  $Mn^{-p-\alpha-1}R^{-n}$ ,  $R > 1$ . Then a Lipschitz condition of a similar nature as before holds on the level curve of  $K$  which is usually denoted by  $C_R$ .

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

### **Spezielle Funktionen:**

**Fischer, Hermann:** Die Laplace-Transformation in der Theorie der Besselfunktionen. Freiburg i. Br.: Diss. 1937. 40 S.

Mit Hilfe des Faltungssatzes der Laplacetransformation berechnet Verf. zunächst viele Integrale der Gestalt

$$\int_0^t u^\lambda J_\nu(u)(t-u)^\sigma J_\mu(t-u) du, \quad \int_0^t u^\lambda J_\nu(\sqrt{u})(t-u)^\sigma J_\mu(\sqrt{t-u}) du.$$

Er beweist z. B.

$$\int_0^t u^{\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(u) J_0(t-u) du = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2}\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} t^{\nu+1} J_\nu(t) \quad (\Re(\nu) > -\frac{1}{2}).$$

Die Ergebnisse sind zum Teil schon bekannt [Watson, Bessel functions, Kap. XII (1922); Bailey, Proc. London Math. Soc. (2) 30, 422—424 (1930) u. 31, 200—208 (1930); Mordell, J. London Math. Soc. 5, 203—208 (1930); Copson, dies. Zbl. 3, 159]. — Ferner gibt Verf. eine Verallgemeinerung der Fourier-Bessel-Entwicklung (Watson, Bessel functions, 591) mit verschiedenen Beispielen. — Schließlich leitet er die bekannten asymptotischen Entwicklungen der Funktionen  $K_\nu(z)$  und  $H_\nu^{(1)}(z)$  ab. Verf. macht mehrere Rechenfehler. Die asymptotische Entwicklung der Funktion  $K_\nu(z)$  gilt für  $|\arg z| < \frac{3\pi}{2}$  und nicht, wie Verf. behauptet, für  $-\frac{5\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ .

C. S. Meijer (Groningen).

**Emde, Fritz:** Zur Berechnung der Zylinderfunktionen mit reellem Index. Z. angew. Math. Mech. 17, 324—340 (1937).

Verf. beschränkt sich auf Argumente, deren reeller Teil und imaginärer Teil pos. ist. Er wendet die Debyesche Paßmethode auf die Sommerfeldschen Integraldarstellungen der Besselschen und Hankelschen Funktionen an. Hieraus erhält er zunächst rohe Abschätzungen der Funktionen mit hohem Index. Mit Hilfe von als Debyesche Funktionen definierten Reihen erhält er die asymptotischen Werte der Integrale über Paßwege. Durch Diskussion der unabhängigen Veränderlichen dieser Debyeschen Funktionen gewinnt Verf. die speziellen Debyeschen Reihen für die verschiedenen Besselschen Funktionen. Eine Reihe von Zahlenbeispielen illustriert die Konvergenz dieser Reihen. Die Gleichungen für die Fall- und für die Höhenlinien der Integranden der Sommerfeldschen Integrale werden aufgestellt und diskutiert. Auf Grund dieser Vorbereitung wird die Frage beantwortet: Wie verläuft eine Falllinie, die von einem Paß kommt, beiderseits des Paßweges ins Unendliche. Dieser Verlauf wird in Kurven dargestellt und zur Diskussion des Überganges der einen Zylinderfunktion in eine andere bei der asymptotischen Integration benutzt. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Howell, W. T.:** On some operational representations of products of parabolic cylinder functions and products of Laguerre polynomials. Philos. Mag., VII. s. 24, 1082—1093 (1937).

Verf. geht aus von operatorischen Darstellungen (Laplaceschen Transformationen) für Laguerrefunktionen und für Webersche Funktionen sowie für Produkte von Laguerrefunktionen und für Produkte von Weberfunktionen. Mit Hilfe dieser Darstel-



lungen berechnet er einige Integrale über Produkte von Laguerreschen Funktionen und über Produkte von Weberschen Funktionen. Diese Integrale führen zu einer neuen unendlichen Integraldarstellung des Produktes zweier Weberschen Funktionen, wobei der Integrand das Produkt einer Exponentialfunktion und einer Besselschen Funktion ist. Weiterhin leitet er Integraldarstellungen für Laguerresche Funktionen ab, wobei der Integrand das Produkt einer Besselschen Funktion, einer Exponentialfunktion und einer Laguerreschen Funktion ist. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Westphal, Heinz:** Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion im kritischen Streifen. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 4, H. 1, 1—31 (1938).

Numerical values are obtained for the positive absolute constants  $a$  in the assertions (I)  $\zeta(s) \neq 0$  for  $\sigma \geq 1 - a_3 \log \log t / \log t$ ,  $t \geq a_2$  (Littlewood), (II)  $\pi(x) = \text{li } x + O(x e^{-a_1 \sqrt{\log x \log \log x}})$  (Littlewood), (III)  $\pi(x + x^{a_1}) - \pi(x) \sim x^{a_1} / \log x$  ( $a_1 < 1$ ) (Hoheisel). Thus (III) is proved for  $a_1 = \frac{5}{8} \frac{4}{5}$ . The paper (originally a dissertation submitted in January 1937) contains no reference to the improved forms of (I), (II) and (III) due to Tchudakoff, which replace  $\log \log$  by  $\log^a$  and show that (III) is true with any  $a_1 > \frac{1}{2}$  (see this Zbl. 15, 198 and 16, 155), and it is to be presumed that these were unknown to the author at the time of writing. *Ingham (Cambridge).*

### **Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:**

● **Courant, R., und D. Hilbert:** Methoden der mathematischen Physik. Bd. 2. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Bd. 48.) Berlin: Julius Springer 1937. XVI, 549 S. u. 57 Abb. RM. 38.—.

Der vorliegende Band ist den partiellen Differentialgleichungen gewidmet. Verf. war bestrebt, überall die inneren Zusammenhänge und leitenden Gesichtspunkte klar hervortreten zu lassen, und die Grundbegriffe werden vielfach von den verschiedensten Seiten her beleuchtet. Es handelt sich hier erfahrungsgemäß um ein für Fernerstehende nicht leicht zugängliches und ziemlich unübersichtliches Gebiet, und man wird daher diese neue klare Einführung besonders begrüßen. Darüber hinaus wird das Werk, wie schon der erste Band, auch als Handbuch nützlich sein durch die klare Anordnung der Methoden und durch die vielen Beispiele. Andererseits betont Verf., daß er nicht die Absicht und Möglichkeit hatte, irgendwie Vollständigkeit zu erreichen. — Die Darstellung ist fließend und enthält sachlich und noch mehr methodisch vielfach Neues, worauf hier im einzelnen einzugehen natürlich nicht möglich ist. — Kap. I gibt eine allgemeine Orientierung über die Mannigfaltigkeit der Lösungen, Äquivalenzprobleme zwischen Funktionenscharen, -familien, Gleichungen und Gleichungssystemen u. dgl. m. Daneben bringt es die einfachsten Lösungsansätze und den Weierstraßschen Existenzsatz. Kap. II bringt die allgemeine Theorie der Gleichungen erster Ordnung im klassischen Umfang mit vielen Beispielen und eine ziemlich ausführliche Darstellung der Hamilton-Jacobischen Theorie, insbesondere im Zusammenhang mit der Variationsrechnung und den kanonischen Transformationen. Kap. III enthält die Klasseneinteilung der Gleichungen und Systeme höherer Ordnung und eine Orientierung über die typischen Probleme. Von den Methoden werden hier behandelt: die Superposition von Wellen verschiedener Form und insbesondere die Heavisidesche Operatorenmethode; zur theoretischen Rechtfertigung der letzteren wird die Laplacetransformation herangezogen. Explizite Durchrechnung einiger typischer Ausstrahlungs- und Ausgleichsprobleme. Kap. IV bringt die klassische Theorie von  $\Delta u = 0$ . Hingewiesen werden mag dabei auf die anscheinend neue wesentliche Verallgemeinerung der Umkehrung des Mittelwertsatzes. Über die Wiener'sche Verallgemeinerung der Randwertaufgabe wird nur berichtet. Behandelt wird noch die Integralgleichungsmethode für Gleichungen mit dem Hauptteil  $\Delta u$ , während für die allgemeinen Gleichungen nur einige Eindeutigkeitssätze gebracht werden. Kap. V enthält die allgemeine Theorie der hyperbolischen Gleichungen und Systeme bei zwei unabhängigen Veränderlichen; die Riemannsche und die Picardsche Methode. Und weiter die vollständige Behandlung der allgemeinen (nicht-linearen) Gleichung nach dem Ansatz von H. Lewy, bei dem die beiden charakteristischen Parameter als simultane Veränderliche eingeführt werden, so daß die charakteristischen Gleichungen ein System partieller Differentialgleichungen liefern. Mit diesem Ansatz wird auch die Analytizität der Lösungen von  $\Delta u = f(x, y, u, u_x, u_y)$  bewiesen. Kap. VI bringt die Theorie der Charakteristiken, der Wellenfronten und des Huygenschen Prinzips bei hyperbolischen Gleichungen mit mehreren Veränderlichen, wobei von den Gleichungen höherer Ordnung insbesondere die der Hydrodynamik und der Kristalloptik berücksichtigt werden. Geschildert wird die Lösung durch die Fouriersche und durch die Hadamardsche Methode,



und bemerkenswert sind ferner die vielfachen Anwendungen der Mittelwertmethoden, u. a. zur Orientierung über die Anfangswertprobleme bei Gleichungen der Form  $u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} = u_{y_1 y_1} + \dots + u_{y_m y_m}$ . Das letzte Kapitel bringt die noch von Bd. 1 ausstehenden Existenzsätze für die elliptischen Rand- und Eigenwertprobleme; es enthält z. T. neue Wendungen, denen es leider nicht möglich ist, hier gerecht zu werden. Es sei daher nur erwähnt, daß die Konstruktionen mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung geschehen, die in glücklicher Weise mit der modernen Theorie der linearen Operatoren verbunden werden. Schließlich findet man auch noch die vom Verf. herrührende Behandlung des Plateauschen Problems (vgl. dies. Zbl. 17, 268 u. 15, 28f.).

W. Feller (Stockholm).

Zaremba, S. K.: *Théorie des réseaux quasi-réguliers. I.* Ann. Soc. Polon. math. 14, 1—73 (1936).

Es sollen in größter Allgemeinheit ebene Kurvennetze rein topologisch untersucht werden, insbesondere um die topologische Natur verschiedener Sätze über die Charakteristiken von (\*)  $Y(x, y) dx - X(x, y) dy = 0$  klarer hervortreten zu lassen. Hierbei legt Verf. Gewicht darauf, daß nur Stetigkeit (auch keine Eindeigkeitseigenschaft) von (\*) vorausgesetzt wird. — Die eingeführten Grundbegriffe sind: Ein quasireguläres Netz  $N$  wird definiert als eine Menge von einfachen Jordanbögen mit folgenden Eigenschaften: a) Jeder Teilbogen eines Bogens von  $N$  gehört wieder  $N$  an. b) Es gibt Gebiete  $U$  der Ebene, für welche man alle Bögen von  $N$ , die, abgesehen evtl. von ihren Endpunkten, ganz in  $U$  verlaufen, in zwei Familien  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  einteilen kann derart, daß b 1) durch jeden Punkt  $M \subset U$  mindestens je ein Bogen von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  geht, dessen Endpunkte am Rande von  $U$  liegen, und zwar soll jeder derartige Bogen von  $\mathfrak{A}$  mit jedem von  $\mathfrak{B}$  genau den Punkt  $M$  gemeinsam haben. b 2) Sind  $c$  und  $c'$  Bögen derselben Familie mit einem gemeinsamen Endpunkt  $C$  und gibt es einen Bogen der komplementären Familie, der durch  $C$  geht und  $c$  von  $c'$  trennt, so gehört auch der Bogen  $c + c'$  derselben Familie an wie  $c$  und  $c'$ . b 3) Jede Folge von Bögen derselben Familie enthält eine konvergente Teilfolge, die entweder gegen einen Punkt konvergiert oder gegen einen Bogen  $c$ ; im letzteren Fall muß jeder Teilbogen von  $c$ , der ganz in  $U$  enthalten ist, ebenfalls zur selben Familie gehören. — Ein Punkt  $M$ , zu dem es eine Umgebung  $U(M)$  der genannten Art gibt, heißt regulär. Das Netz heißt monodrom, wenn eine Familienenteilung mit den Eigenschaften b 1)—b 3) möglich ist für sämtliche Bögen, die durch keinen singulären Punkt gehen. Außerdem wird noch in naheliegender Weise der Orientierbarkeitsbegriff eingeführt. Die Charakteristiken von (\*) bilden stets eine orientierbare monodrome Familie, d. h. sind zu einem derartigen Netz ergänzbar. — Der vorliegende erste Teil enthält eine große Anzahl vorbereitender allgemeiner Sätze über derartige Netze und deren Diagonaletze, hauptsächlich aber einen Abriß über die benötigte Theorie der topologischen Indizes solcher Netze.

W. Feller (Stockholm).

Zaremba, S. K.: *Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles.* Ann. Soc. Polon. math. 15, 83—100 (1937).

Die Entwicklungen des vorangehenden Referats finden ein Analogon in  $(n+1)$  Dimensionen, wenn man systematisch den Kurven der einen erwähnten Familie eine Schar paralleler Hyperebenen entsprechen läßt: Es handelt sich dann um eine Kurvenfamilie  $\mathfrak{C}$ , die in der Schicht  $a \leq x \leq b$  des Raumes  $(x, y_1, \dots, y_n)$  definiert sind, mit jeder Ebene  $x = c$  ( $a \leq c \leq b$ ) höchstens einen Punkt gemeinsam haben und deren Eigenschaften im übrigen a) und b 1)—3) des vorangehenden Ref. entsprechen.

Die Charakteristiken eines Differentialgleichungssystems  $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$  haben die genannten Eigenschaften, aber im Gegensatz zum ebenen Fall sind sie von speziellerer Natur. Unter der Emissionszone  $H(M)$  eines Punktes oder Kontinuums  $M$  werde die Gesamtheit der Bogen der Familie verstanden, die durch  $M$  hindurchgehen. Die Familie  $\mathfrak{C}$  genießt die „H. Knesersche Eigenschaft“, wenn für jeden Punkt  $P$  der Durchschnitt von  $H(P)$  mit einer beliebigen Ebene  $x = c$  ein Kontinuum ist. Daraus folgt dann dasselbe auch für die Emissionszone eines beliebigen Kontinuums, und ferner ergeben sich sämtliche bekannte topologische Eigenschaften der erwähnten

Charakteristiken. Insbesondere gilt das von einem Satz von Fukuhara, der folgendermaßen verallgemeinert werden kann: Ist  $K$  ein Kontinuum, so kann jeder  $K$  nicht angehörende Punkt des Randes von  $H(K)$  mit  $K$  verbunden werden durch einen Bogen von  $\mathfrak{C}$ , der ganz auf dem Rande von  $H(K)$  liegt. W. Feller (Stockholm).

Ważewski, T., et S. K. Zaremba: Sur les ensembles de condensation des caractéristiques d'un système d'équations différentielles ordinaires. Ann. Soc. Polon. math. 15, 24—33 (1937).

Für das System

$$x'(t) = x(1 - r^2) - y, \quad y' = y(1 - r^2) + x, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

ist bekanntlich der Einheitskreis Grenzcharakteristik, der Nullpunkt singulärer Punkt, und die im Einheitskreis gelegenen Charakteristiken münden mit dem einen Ende spiralig in den Nullpunkt, während sie sich mit dem anderen Ende spiralig an den Einheitskreis heranwinden. Durch konforme Abbildung dieser Figur wird gezeigt, daß es für jedes einfach zusammenhängende Gebiet  $\mathfrak{G}$ , das nicht die ganze Ebene ist, Differentialgleichungssysteme

$$x' = U(x, y), \quad y' = V(x, y)$$

gibt, so daß  $U, V$  beliebig oft stetig differenzierbar sind,  $U = V = 0$  nur für einen einzigen Punkt  $x_0, y_0$  von  $\mathfrak{G}$  gilt und jede Charakteristik, die nicht durch diesen Punkt geht, mit dem einen Ende in  $x_0, y_0$  einmündet, während für das andere Ende jeder Randpunkt von  $\mathfrak{G}$  Grenzpunkt ist. — Indem man nun die  $x, y$ -Ebene samt diesen Charakteristiken um eine passend gewählte Gerade der  $x, y$ -Ebene rotieren läßt, kann man zu einem Differentialgleichungssystem

$$x' = A(x, y, z), \quad y' = B(x, y, z), \quad z' = C(x, y, z)$$

gelangen, das folgende Eigenschaften hat:  $A, B, C$  haben im ganzen Raum stetige partielle Ableitungen jeder Ordnung; überall ist  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ ; es gibt unendlich viele Charakteristiken mit gemeinsamer Menge  $\Phi$  ihrer Grenzpunkte; kein Charakteristikenpaar, das nur aus Punkten von  $\Phi$  besteht, kann durch eine in  $\Phi$  verlaufende Jordankurve verbunden werden;  $\Phi$  teilt den Raum in beliebig viele getrennte Gebiete;  $\Phi$  hat ein positives räumliches Maß. Sind  $A, B, C$  analytisch, so kann das letzte Vorkommnis jedoch nicht eintreten. Kamke (Tübingen).

Ważewski, T.: Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. 43, 522—532 (1938).

Es handelt sich um die Differentialgleichung

$$p = f(x, y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q_r = \frac{\partial z}{\partial y_r}.$$

Vorausgesetzt wird:  $f$  ist nebst den partiellen Ableitungen erster Ordnung nach  $y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n$  in dem Würfel

$$|x - x^0|, |y_i - y_i^0|, |z - z^0|, |q_i - q_i^0| \leq K_1$$

stetig,  $\omega(y_1, \dots, y_n)$  hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in dem Würfel

$$|y_i - y_i^0| \leq K_1.$$

Es bestehen die Beschränktheitseigenschaften

$$|f|, |f_{y_i}|, |f_z|, |f_{q_i}|, |\omega_{y_i}| < M.$$

Die Funktionen  $f_{y_i}, f_z, f_{q_i}, \omega_{y_i}$  erfüllen in den genannten Würfeln die Lipschitzbedingung in bezug auf  $y_1, \dots, y_n$  bzw.  $y_1, \dots, y_n$  mit der Lipschitzkonstanten  $M_1$ . Schließlich sei für ein  $0 < K < K_1$

$$|q_i^0| < M_1, \quad |\omega(y_1^0, \dots, y_n^0) - z^0| < \frac{K}{4}, \quad |\omega_{y_i}(y_1^0, \dots, y_n^0) - q_i^0| < \frac{K}{4}.$$

Behauptung: Die Differentialgleichung hat für  $M > M_1$  in der Doppelpyramide

$$|x - x^0| \leq \frac{K^2}{[(n+1)(M+K+1)]^2}, \quad |y_i - y_i^0| \leq \frac{K}{4n(M+1)} - M|x - x^0|$$



genau eine Lösung  $z = \chi(x, y_1, \dots, y_n)$ , die in dem Würfel

$$x = x^0, \quad |y_i - y_i^0| \leq \frac{K}{4n(M+1)}$$

mit der Funktion  $\omega$  übereinstimmt. — Der Fortschritt gegenüber den bisher bekannten Sätzen besteht darin, daß hier nicht mehr die Existenz der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung vorausgesetzt wird. Durch Beispiele wird gezeigt, daß die vorausgesetzten Lipschitzbedingungen nicht weiter reduziert werden können. Der Beweis des Satzes wird geführt, indem die Funktionen  $f$  und  $\omega$  durch geeignete Folgen von Polynomen beliebig genau approximiert werden. *Kamke (Tübingen).*

**Ważewski, T.:** Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre. Ann. Soc. Polon. math. 14, 149—177 (1936).

Es handelt sich um die Existenz und eindeutige Bestimmtheit einer Lösung für die Differentialgleichung

$$p = f(x, y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}.$$

Vorausgesetzt wird:  $f$  sei in dem Würfel

$$|x - x^0| \leq K, \quad |y_i - y_i^0| \leq K, \quad |z - z^0| \leq K, \quad |q_i - q_i^0| \leq K$$

stetig und habe stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung in bezug auf  $y_1, \dots, y_n, z, q_1, \dots, q_n$  sowie eine stetige Ableitung erster Ordnung nach  $x$ . Die Funktion  $\omega(y_1, \dots, y_n)$  möge in dem Würfel

$$|y_i - y_i^0| \leq K$$

stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzen. Weiter seien in den angegebenen Würfeln die Beschränktheitsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} &|f|, |f_{y_i}|, |f_z|, |f_{q_i}| \\ &|f_{y_i y_k}|, |f_{zz}|, |f_{q_i q_k}|, |f_{y_i z}|, |f_{y_i q_k}|, |f_{z q_i}| \end{aligned} \right\} < M, \\ &|\omega_{y_i}|, |\omega_{y_i y_k}| < M$$

erfüllt. Schließlich sei

$$|q_i^0| < M, \quad |\omega(y_1^0, \dots, y_n^0) - z^0| < \frac{K}{4}, \quad |\omega_{y_i}(y_1^0, \dots, y_n^0) - q_i^0| < \frac{K}{4}.$$

Dann hat die Differentialgleichung genau eine Lösung  $z = \chi(x, y_1, \dots, y_n)$ , die existiert und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in der Doppelpyramide

$$|x - x^0| \leq \frac{K^2}{(n+1)^5(M+K+1)^5}, \quad |y_i - y_i^0| \leq \frac{K}{4n(M+1)} - M|x - x^0|$$

hat und die für  $x = x^0$  in dem Würfel

$$|y_i - y_i^0| \leq \frac{K}{4n(M+1)}$$

den Anfangswert  $\omega(y_1, \dots, y_n)$  hat. — Verf. gibt noch Zusätze für den Fall, daß die Existenz höherer Ableitungen vorausgesetzt wird. *Kamke (Tübingen).*

**Ważewski, T.:** Sur le problème de Cauchy relatif à un système d'équations aux dérivées partielles. Ann. Soc. Polon. math. 15, 101—127 (1937).

Es handelt sich um das System

$$\frac{\partial z_\mu}{\partial x} = f_\mu(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_n})$$

$$(\mu = 1, \dots, m)$$

für  $m$  gesuchte Funktionen  $z_\mu = z_\mu(x, y_1, \dots, y_n)$ . Zur Abkürzung werde

$$p_\mu = \frac{\partial z_\mu}{\partial x}, \quad q_{\mu\nu} = \frac{\partial z_\mu}{\partial y_\nu}$$

gesetzt. — Voraussetzung: Die  $f_\mu$  sind nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in dem Bereich

$$0 \leq x < \alpha; \quad y_\nu, z_\mu, q_{\mu\nu} \text{ beliebig}$$

stetig;  $\omega_\mu(y_1, \dots, y_n)$  sind nebst den partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in dem ganzen  $y$ -Raum stetig. In den angegebenen Bereichen ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial f_\mu}{\partial y_\alpha} \right|, \quad \left| \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\alpha} \right|, \quad \left| \frac{\partial f_\mu}{\partial q_{\mu\alpha}} \right| \\ \left| \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial q_{\mu\alpha} \partial q_{\mu\beta}} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial z_\alpha \partial q_{\mu\beta}} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial y_\alpha \partial q_{\mu\beta}} \right| \end{array} \right\} \leq M,$$

$$\left| \frac{\partial \omega_\mu}{\partial y_\alpha} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 \omega_\mu}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right| \leq M.$$

$$r = 2M + \frac{1}{2(m+n)}, \quad N = M(1 + 3mr + m^2 r^2),$$

$$\lambda(t) = N + 2nN(1 + N) e^{Nt},$$

s Lösung der Gleichung

$$nN(1 + nN + N) \int_0^x dx \exp \int_0^x \lambda(t) dt = 1,$$

$$b = \text{Min}\{a, s, [4M(m+n)(1 + 2M(m+n))]^{-1}\}.$$

Behauptung: Das Differentialgleichungssystem besitzt in dem Bereich

$$0 \leq x < b; \quad y_1, \dots, y_n \text{ beliebig}$$

genau ein Lösungssystem

$$z_\mu = \chi_\mu(x, y_1, \dots, y_n),$$

das die Anfangsbedingungen

$$\chi_\mu(0, y_1, \dots, y_n) = \omega_\mu(y_1, \dots, y_n)$$

erfüllt.

Kamke (Tübingen).

Germa y, R. H. J.: Sur l'intégration des systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales. — Modification de la méthode de M. Nikliborc quand les coefficients différentiels sont les limites de suites uniformément convergentes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 6, 218—228 (1937).

Let  $S_i$  be a sequence of passive systems of total differential equations  $dz_i^\alpha = a_{i\lambda}^\alpha(x, z) dz_\lambda$ . Let the coefficients of  $S_i$  have continuous first derivatives which converge uniformly to limits as  $n \rightarrow \infty$ . Then  $S_i \rightarrow S$ , where  $S$  is a passive system of total differential equations. A sequence  $z_i^\alpha$  is defined recursively by the formulas

$$z_i^\alpha = \int_0^1 a_{i\lambda}^\alpha [tx_1, \dots, tx_n; z_1^{\alpha-1}(tx_1, \dots, tx_n), \dots, z_m^{\alpha-1}(tx_1, \dots, tx_n)] x_\lambda dt,$$

following Nikliborc (Germa y, this Zbl. 17, 209). This sequence is shown to converge to the solution of  $S$ .

J. M. Thomas (Durham).

Vessiot, Ernest: Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre,  $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ , intégrables par la méthode de Darboux. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 643—645 (1937).

Vessiot, Ernest: Sur les équations  $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$  qui ont une intégrale générale explicite. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 779—781 (1937).

The author employs the results previously obtained (this Zbl. 15, 210) to seek the equations  $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ , having distinct characteristic systems, which are integrable by Darboux's method. The condition for such an equation is that each singular subpencil of the associated pencil of infinitesimal symbols  $X_\alpha$  have at least two invariants. The present treatment is limited to the case where the invariants are of the first or the second order. The equations are divided into classes, all members of a class being equivalent under contact transformations, and a type equation is sought as representative for each class. — The second paper gives a complete table of these types for all equations having an explicit general solution. Goursat's classification and notation [Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (2) 1, 439—464 (1899)] are employed.

J. M. Thomas (Durham).



# Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Liénard, Alfred: Un cas particulier du problème de Dirichlet pour une couronne circulaire. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 34—35 (1938).

On cherche s'il existe une fct. analytique (dans la couronne) dont la partie réelle donnée sur le pourtour se reproduise multipliée par une  $C^m$  quand l'angle polaire augmente de  $2\pi$ , et qui jouisse elle-même de cette propriété sur toute circonférence concentrique. Solution unique sauf pour  $m = \alpha^k$  ( $k$  entier alg. quelc. et  $\alpha$  const. attachée à la couronne) dans quel cas il y a impossibilité ou indétermination suivant les données-frontière. Brelot (Bordeaux).

Ricci, Carlo Luigi: Complementi sul calcolo della distribuzione delle tensioni tangenziali in prismi soggetti a torsione od a taglio. Speciali avvertenze per i casi di sezioni presentanti punti angolosi (in particolare rettangolari). Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 7, 94—107 (1937).

This paper discusses the behavior of the harmonic function in the neighborhood of an angular point at the boundary of a simply connected domain in the plane in the case for which the boundary condition is that appropriate to the torsion problem in elasticity. The stress function  $F$  is defined as  $F = \Phi + \frac{1}{2}r^2$  with  $\Phi$  harmonic.  $F$  then satisfies  $\Delta F = 2$  and must be a constant  $F_0$  on the boundary. The function  $F$  is studied in the neighborhood of angular points which are either convex or concave toward the exterior of the domain, the former case being studied for acute, right, and obtuse angles. The noteworthy idea of the writer is to consider the differential geometry of the  $F$ -surface in the neighborhood of such angular points, using the facts that the tangent plane there is horizontal and that the tangents to the boundary curve at the angular point are tangents to the asymptotic lines of the surface. These geometrical properties furnish relations between various derivatives of  $F$  and the angle between the tangents at the angular point. The osculating paraboloid of the surface at this point is introduced and found to be:  $F - F_0 = \frac{a}{2}r^2 \cos(2\varphi) + \frac{1}{2}r^2$  with  $a = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]_0 = - \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]_0$ . The  $x$  and  $y$  axes are taken along the bisectors of the angle between tangents at the angular point and  $\varphi$  is measured from the  $x$ -axis (chosen so that it lies inside the domain). If the angle between the tangents (measured in the space which contains interior points of the domain) is  $2\alpha$ , then  $a = \frac{-1}{\cos(2\alpha)}$ . — For all but the case of the acute angle (convex toward exterior), it is necessary to add a term of the form  $Br^k \cos(k\varphi)$  to  $F$ , in which  $1 < k < 2$ . The methods of determining  $k$  and  $B$  are discussed in detail for the cases mentioned. — The author applies similar considerations to another problem in elasticity (shear stress in beams) in which the harmonic function  $\Phi$  satisfies a boundary condition different from that in the foregoing. Stoker (New York).

Ricci, Carlo Luigi: Contributo allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a torsione, taglio e flessione. Precisazione e generalizzazione del concetto di centro di taglio. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 7, 206—238 (1937).

Vgl. vorst. Referat.

Morris, Rosa M.: Two-dimensional potential problems. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 474—484 (1937).

The equation of a cylinder is written in a form due to Wrinch

$$z = e^{-i\xi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{ni\xi} \right)$$

which includes most of the cases for which solutions are known which are enumerated by the author. The latter works with the complex potential  $\Omega = \Phi + i\Psi$  and finds that when the cylinder is in a uniform field with complex potential  $\Omega_0 = -Ee^{-i\theta}z$  the total force per unit length on the cylinder is zero while the couple is the real part

of  $-\frac{1}{2}iE^2a_0(\bar{a}_0 + a_2e^{-2i\theta})$ . For a rectangle whose diagonals make an angle  $2\alpha$  with one another the couple is  $\frac{1}{2}E^2A^2\cos 2\alpha\sin 2\theta$ ,  $A$  being a constant depending on the dimensions of the rectangle. — The corresponding problem when the cylinder is under the influence of a line charge is worked out the force being now not zero. The additional terms due to an intrinsic charge on the cylinder are also found. The analysis is all based on the use of contour integrals involving  $(\partial\Omega/\partial z)^2$  introduced in a previous paper (this Zbl. 16, 213). For the same cylinder a treatment is given of the hydrodynamical problem of the cylinder in a uniform stream and of the cylinder in motion in an infinite liquid.

H. Bateman (Pasadena).

Morris, Rosa M.: Notes on two-dimensional potential theory. V. The generalized formulae for the forces and couple on a moving cylinder. Philos. Mag., VII. s. 24, 445—453 (1937).

If  $\Omega = \Phi + i\Psi$ ,  $\bar{\Omega} = \Phi - i\Psi$ ,  $w = u + iv$ ,  $\bar{w} = u - iv$ , the pressure  $p$  is given by the formula

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial t} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial z}\right),$$

where  $\rho$  is the density of the fluid. The components of force ( $X$ ,  $Y$ ) per unit length of a moving cylinder are, apart from the acceleration terms, given by the contour integral

$$2(Y + iX)/\rho = \oint_c (w + i\omega z)(\bar{w} - i\omega\bar{z})d\bar{z} - \oint_c \left(\bar{w} - i\omega\bar{z} - \frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2 dz,$$

where  $\omega$  is the angular velocity of the cylinder about any normal to its cross-section. Under like conditions the couple is the real part of the integral

$$\frac{1}{2}\rho\oint_c (w + i\omega z)(\bar{w} - i\omega\bar{z})z d\bar{z} - \frac{1}{2}\rho\oint_c \left(\bar{w} - i\omega\bar{z} - \frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2 z dz.$$

These results are general forms of familiar statical results due to Blasius. The case of an elliptic cylinder is worked out in detail and a result found agreeing with one obtained by Glauert. (IV. see this Zbl. 17, 69.)

H. Bateman (Pasadena).

Imai, Isao: Note on the plane motion of an incompressible fluid. (Physic. Inst., Fac. of Sci., Univ., Osaka.) Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 922—936 (1937).

Cases in which the stream lines have the origin as centre of similitude are considered. When the fluid is inviscid all the possible cases are found some of the motions being irrotational and some rotational. In one case of the latter type the stream function  $\theta$  is given by the equation  $\Psi = A[r f(\theta)]^a + B$ , where  $A$ ,  $B$  and  $a$  are constants and  $f(\theta)$  is determined by the equation

$$\theta = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} [F(t)]^{-\frac{1}{a}} dt$$

where  $F(t) = -t^2 + ct^{2-2a} + b/(a-1)$  when  $a \neq 1$  and  $F(t) = -t^2 + 2b \log t + c$  when  $a = 1$ . — For a viscous fluid no solution of practical importance other than the known solutions is found but the possible existence of a mathematically interesting solution is indicated. The derivation of this solution depends on the solution of a differential equation which has been studied by Mittag-Leffler and which can be treated with the aid of the elliptic functions of Weierstrass.

H. Bateman.

Agostinelli, Cataldo: Sopra alcuni notevoli moti fluidi vorticosi. Rend. Circ. mat. Palermo 60, 169—184 (1936).

In this paper the classical Eulerian differential equations which govern the motion of a perfect incompressible fluid (under the action of conservative applied forces) are first written in vectorial form and then transcribed in a form suitable to a system of orthogonal curvilinear coordinates. The case of cylindrical coordinates is then treated, under the assumption that the vorticity is independent of the time and orthogonal to the axis of the cylindrical coordinates (the  $z$  axis); special results are obtained on the further assumption that the velocity components (perpendicular to the  $z$  axis)



are linear functions of  $z$ . Possible fluid surfaces are discussed; particular attention being given to the case where the fluid surface is a central quadric. *Murnaghan*.

**Sbrana, F.:** Sul moto di un solido ellissoidico immerso in un liquido. *Rend. Circ. mat. Palermo* **60**, 90—100 (1936).

This paper treats, from first principles, the problem of the motion of a solid immersed in a perfect incompressible fluid and discusses in detail the case where the solid is an ellipsoid. The motion of the fluid is assumed to be irrotational and the classical formulae of Kirchhoff (obtained by the use of Lagrange's equations) are derived. Particular results, applicable when the ellipsoid is one of revolution and the applied forces are only those due to gravity, are given. *Murnaghan* (Baltimore).

### Integralgleichungen, Integraltransformationen:

**Ghermaneseu, Michel:** Sur une classe nouvelle de noyaux de Fredholm. *C. R. Acad. Sci., Paris* **205**, 782—784 (1937).

The class of kernels are of the form

$$K(x, y) = M(x, y) + N(x, y) = M(x, y) + P(x, y) - \int_a^b M(x, s) P(s, y) ds$$

where  $M$  is real symmetric and such that  $\int_a^b u^2 - \int_a^b \int_a^b M(x, y) u(x) u(y) dy dx > 0$  for

all continuous  $u(x) \not\equiv 0$ , and  $N(x, y)$  is skew symmetric, which is similar to a case considered by Anghelutza (this Zbl. **8**, 359). Results stated include the fact that the characteristic values of  $K(x, y)$  are simple and either real or of the form  $\pm i\alpha$ . Kernels  $L(x, y)$  not symmetric satisfying the same condition as  $M$  can be put in the form prescribed for  $K$ . *Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Golomb, Michael:** Über Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen. *Publ. Math. Univ. Belgrade* **5**, 52—83 (1936).

Satz I: (1)  $\psi_i(s) + \sum_{j=1}^n \int_0^1 K_{ij}(s, t) f_j[t, \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)] dt = 0$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) besitzt bei

$$K_{ij} = K_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 \int_0^1 K_{ij}(s, t) \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt \geq 0, \quad f_i(s, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial}{\partial u_i} F(s, u_1, \dots, u_n)$$

wenigstens eine Lösung, wenn  $F \geq -\frac{k}{2}(u_1^2 + \dots + u_n^2) - C$ , genau eine Lösung, wenn der kleinste Eigenwert der Matrix  $\|f_{ij}\|$  nicht kleiner als  $-k$  ist.  $k > 0$  ist kleiner als der kleinste Eigenwert der Kernmatrix  $C > 0$ . Für nichtsymmetrische  $K_i(s, t)$  besteht

Satz III ( $K$  der „zusammengefügte“ Kern): (2)  $\psi_i(s) + \int_0^1 K_i(s, t) f_i[t, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)] dt = 0$  ist eindeutig lösbar, falls  $\int_0^u \int_0^u K[s, t] \bar{\varphi}_1(s), \bar{\varphi}_2(s), \dots, \bar{\varphi}_n(s) [\varphi(s) \varphi(t) ds dt > -k \int_0^n \varphi^2(s) ds$ ,

$K < 1$ . Satz II bringt ein Existenz- und Eindeigkeitstheorem für das dem System (2) entsprechende inhomogene System. *Schauder* (Lwów).

● **Titchmarsh, E. C.:** Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford: Clarendon press 1937. X, 390 pag. bound 17/6.

A couple of introductory chapters bring the formal theory of Fourier, Laplace and Mellin transforms and the convergence and summability theory of the Fourier simple and double integrals. This is followed by a thorough discussion of the theory of Fourier transforms in the classes  $L$ ,  $L_2$  (Plancherel), and  $L_p$  (Titchmarsh). In chapter V we find the theory of conjugate functions and Hilbert transforms for the classes  $L_p$ ,  $1 \leq p$ , where the central theorems are due to M. Riesz. Chapter VI gives the uniqueness and Riemannian theory of trigonometric integrals. After a rich chapter on examples and applications comes the theory of general transforms and self-reciprocal function (Hardy, Titchmarsh, Watson, and their pupils). These chapters are unique and form the core of the book, at least its most novel part. The

last two chapters bring a wealth of applications to differential, difference, and integral equations. The book is completed by a valuable bibliography listing over 300 items (the caption "memoirs referred to in the text" is misleading, only a small fraction is actually quoted). — This treatise gives an easily readable, systematic account of the theory. In a way it is a monument to the British school of analysis and the reader who wants a clear, concentrated picture of the achievements of this school in Fourier analysis will find the book invaluable. It is also a veritable thesaurus for elegant formulas, useful to the workers in special fields. Naturally there are omissions, some rather striking. Thus in the discussion of general transforms one misses a reference to the important work of Bochner and of Kaczmarz. Fourier-Stieltjes transforms and similar extensions are omitted. Finally no attempt is made of coordinating the theory with that of general linear transformations and metric spaces. *E. Hille.*

### **Variationsrechnung:**

**Caccioppoli, R.:** Sul carattere analitico delle soluzioni di una classe di problemi del calcolo delle variazioni. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 25, 24—26 (1937).

Durch Zurückführung auf ein früheres Ergebnis (dies. Zbl. 13, 164) wird die Analytizität der Extremale  $z$  von  $\int_R F(p, q) dx dy$  bei analytischem  $F$  und  $F_{pp} \cdot F_{qq} - F_{pq}^2 > 0$

bewiesen, falls  $z$  eine Lipschitzbedingung erfüllt. Ref. bemerkt noch: Aus dem erwähnten früheren Ergebnis des Verf. (dies. Zbl. 13, 164) folgen die Resultate einer Arbeit von H. Lewy (dies. Zbl. 11, 350) sowie Satz I einer zweiten Lewyschen Arbeit (dies. Zbl. 17, 211) ohne Analytizitätsvoraussetzungen. *Schauder (Lwów).*

**Manià, B.:** Un lemma notevole per i problemi di Mayer e una sua applicazione. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 25, 564—573 (1937).

For the Mayer problem of minimizing  $u_C(L)$ , where

$$u_C(s) = u_0 + \int_0^s F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u_C(s)) ds,$$

in a class  $K$  of curves  $C: x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq L$  joining two fixed points, the author develops and applies a lemma somewhat related to Lindeberg's theorem. Under rather general conditions, for every positive  $\delta$  there are positive numbers  $\lambda, \tau$  such that if the length  $L_0$  of  $C_0$  is less than  $\lambda$ , then  $u_C(L_0)$  is defined, and if the angle of the tangent to  $C_0$  oscillates less than  $\tau$ , then  $u_C(L) \geq u_C(L_0)$  for all rectifiable curves  $C$  joining the ends of  $C_0$  and having length  $L \geq (1 + \delta)L_0$ . The author indicates that the lemma could be used to obtain a new proof of an existence theorem previously proved by him. He then uses it to show that if  $C$  minimizes  $u_C(L)$  in a class of curves lying in a region  $D$  bounded by a finite number of smooth arcs, the tangent to  $C$  varies continuously except possibly where  $C$  meets a boundary point of  $D$  which is an inwardly directed corner point of the boundary. *McShane (Virginia).*

**Perlin, Irwin Earl:** Sufficient conditions for a minimum in the problem of Lagrange with isoperimetric conditions. *Contribut. calculus variations 1933—1937*, 207—241 a. Chicago: These (1937).

The author considers the problem of minimizing an integral  $J = \int f(x, x') dt$  in a class of curves  $x = x(t)$  [i.e.  $x_i = x_i(t), i = 1, \dots, k$ ],  $t_1 \leq t \leq t_2$  which satisfy differential equations  $\varphi_\beta(x, x') = 0$  ( $\beta = 1, \dots, m < k$ ) and give assigned values  $l_1, \dots, l_h$  to integrals  $I_\sigma = \int g_\sigma(x, x') dt$ . This can be written as a Lagrange problem; but as is usual when an isoperimetric problem is written as a Lagrange problem, the conditions for a strong relative minimum for the Lagrange problem yield only a semi-strong relative minimum for the problem with isoperimetric side-conditions. For the usual isoperimetric problem the difficulty is overcome by use of Lindeberg's theorem. The central point of this paper is the development of a generalized form of Lindeberg's theorem which permits the presence of the differential equations  $\varphi_\beta(x, x') = 0$



as additional side conditions. In its statement the theorem is a direct generalization of the Lindeberg theorem as formulated, e.g., by Tonelli in his *Fondamenti di Calcolo delle Variazione*. The proof utilizes and generalizes theorems established by the reviewer in his dissertation. The theorem is then utilized in obtaining sufficient conditions for the problem under discussion from sufficient conditions for the Lagrange problem in parametric form, and in turn deriving these from known sufficient conditions for the problem in non-parametric form. Generalizations of Osgood's theorem are developed.

McShane (Virginia).

Reid, W. T.: Boundary value problems of the calculus of variations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 633—666 (1937).

The Jacobi condition for minimizing  $\int f(x, y, y') dx$  can be stated as the requirement that the associated boundary value problem  $J(\eta) + \lambda \eta = 0$ ,  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , in which  $J(\eta) = (f_{y'y'}\eta' + f_{yy'}\eta)' - (f_{yy'}\eta' + f_{yy}\eta)$ , shall have no negative characteristic value. Sufficient conditions for this problem of the calculus of variations can be stated in terms of characteristic values of the associated boundary value problem. Conversely, the methods of the calculus of variations can be applied to the study of a large class of boundary value problems. The present paper is in the main a report on the contributions made in recent years to the study of the interrelations between boundary value problems of a more general character than the one mentioned above and the general problem of Bolza (compare Bliss, this Zbl. 15, 357). *A. Dresden.*

Gillis, Paul: Sur les intégrales multiples du calcul des variations. *C. R. Acad. Sci., Paris* 206, 32—34 (1938).

L'A. énonce sans démonstration le théorème suivant. Soient  $D_2$  un domaine [dont la frontière  $D_1$  satisfait à certaines conditions de régularité] et  $f(s)$  une suite continue de valeurs données sur la frontière  $D_1$ ; supposons de plus que  $|f(s) - f(t)| > A r_{st}$  ( $A = \text{const}$ ),  $s$  et  $t$  étant deux points quelconques de  $D_1$ ,  $r_{st}$  leur distance. Les conditions

$$F_{zx}z_y > 0, \quad F_{zx}z_x F_{zy}z_y - F_{zx}^2 > 0,$$

étant remplies, il existe une fonction  $z(x, y)$ , vérifiant une condition de Lipschitz, prenant sur  $D_1$  les valeurs données et réalisant le minimum de

$$I(z) = \iint_{D_2} F[x, y, z_x(x, y), z_y(x, y)] dx dy$$

relativement à l'ensemble des fonctions lipschitziennes, prenant sur  $D_1$  les mêmes valeurs. — L'A. indique en outre quelques généralisations possibles. *Basilio Manià.*

Bardell, Ross Harvey: The inequalities of Morse for a parametric problem of the calculus of variations. *Contribut. calculus variations 1933—1937*, 277—312 a. Chicago: These (1937).

The author considers the extremals joining two points 1 and 2 of a region  $R$ . He assumes that the analytic integrand  $F$  satisfies  $F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y')$  for  $k > 0$ , that  $F_{x'x'}/y'^2 > 0$ , that the boundary of  $R$  is piecewise analytic and  $R$  extremal convex, and that 2 is not conjugate to 1 on any extremal. With these assumptions it is shown by continuity considerations alone, that there is a finite number of extremal arcs 12 in  $R$ ; these may be ordered according to their slopes in 1. The "type" of an extremal arc 12 is the number of points conjugate to 1 it contains. The set of extremals 12 may then be divided into "sequences", each sequence consisting of subsequent extremals of same type and preceded and followed by extremals of different type. If  $S_i$  is the number of sequences of extremals of type  $i$  and  $n$  the maximum type, then  $S_i > \sum_{k=1}^i S_{i-k} + (-1)^i$  for  $i = 0, \dots, n-1$  and  $S_n = \sum_{k=1}^n S_{n-k} + (-1)^n$ .

Under the stricter assumption  $F(x, y, kx', ky') = |k| \cdot F(x, y, x', y')$  for all  $k$  ("reversibility"), the author proves, that every sequence consists of a single arc and  $S_i$  can be replaced by the number  $M_i$  of arcs of type  $i$ . Inequalities similar to those resulting for  $M_i$  had been proved by M. Morse (*Trans. Amer. Math. Soc.* 32, 623)

and Richmond (Bull. Amer. Math. Soc. 35, 257), without the stronger assumption on  $F$ , but not excluding the equality sign in the inequalities for  $M_i$ . *F. John.*

### **Funktionentheorie:**

**Noshiro, Kiyoshi:** Some theorems on a cluster-set of an analytic function. Proc. Imp. Acad. Jap. 13, 27—29 (1937).

Of a topological nature. If  $f(z)$  is regular in a domain  $D$  its set of values is a domain  $\mathfrak{D}$ . The image of the frontier of  $D$  is the set of cluster values. The basic result is: If the frontier of the image  $\mathfrak{D}$  coincide with the image of the frontier of  $D$ , then  $f(z)$  takes every value of  $\mathfrak{D}$  the same finite number of times. If  $f'(z)$  never vanishes and  $\mathfrak{D}$  is simply connected then  $f(z)$  is schlicht [generalisation of a theorem of T. Sato, Proc. Imp. Acad. Jap. 12, 332—334 (1936); this Zbl. 17, 216]. If the cluster set has an interior point, some value of  $\mathfrak{D}$  is taken an infinite number of times, and if the cluster set has no interior point then none of its values can be attained in  $D$  more often than all non cluster values of  $\mathfrak{D}$ . *Macintyre (Aberdeen).*

**Golusin, G.:** Einige Überdeckungssätze für die im Kreise regulären Funktionen. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 617—618 u. deutsch. Zusammenfassung 619 (1937) [Russisch].

The theorems concern a function  $w = z + a_2 z^2 + \dots$  regular for  $|z| < 1$  and that Mittag Leffler star region of its inverse function whose centre corresponds to  $z = 0$ . The area of this region is not less than  $\pi$ , and it is possible to find in it for given  $n$ ,  $n$  radii meeting in equal angles at  $w = 0$  the product of whose lengths is arbitrarily near 1. *Macintyre (Aberdeen).*

**Robertson, M. S.:** A representation of all analytic functions in terms of functions with positive real part. Ann. of Math., II. s. 38, 770—783 (1937).

Es handelt sich um die Klasse  $\mathfrak{S}_k$  derjenigen für  $|z| < 1$  regulären Funktionen  $f_k(z) = z^k + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ , welche die Kreise  $|z| = r$ ,  $0 < r < 1$ , auf Kurven abbilden, die die reelle Achse in genau  $2k$  Punkten treffen. Die charakteristische Darstellung

$$f_k(z) = \frac{z^k}{\prod_{i=1}^{2k} (1 - z e^{-i\theta_i})} [1 + i e^{-i\sigma_k} (F(z) - 1)]; \quad \sigma_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2k} \theta_i; \quad (-1)^{k-1} \sin \sigma_k \geq 0,$$

wo  $F(z)$  eine für  $|z| < 1$  reguläre Funktion positiven Realteils mit  $F(0) = 1$  ist, führt die Untersuchung auf die Carathéodorysche Klasse der  $F(z)$  zurück [Math. Ann. 64, 95—115 (1907)]. Für  $k = 1$  vgl. eine frühere Arbeit des Verf. [Amer. J. Math. 58 (1936); dies. Zbl. 14, 120]. Für die  $f_k(z)$  mit reellen Koeffizienten  $a_n$  handelt es sich um eine Verallgemeinerung der typisch-reellen Potenzreihen ( $k = 1$ ) [W. Rogosinski, Math. Z. 35 (1932); dies. Zbl. 3, 393]; die obige charakteristische Darstellung wird

$$\text{dann } f_k(z) = \frac{z^k F(z)}{(1 - z^2) \prod_{j=2}^k (1 - 2z \cos \theta_j + z^2)}. \quad \text{Es werden insbesondere die scharfen Ab-}$$

schätzungen  $|a_n| \leq \frac{n}{k} \frac{(n+k-1)!}{(2k-1)!(n-k)!}$  im allgemeinen und  $|a_n| \leq \frac{(n+k-1)!}{(2k-1)!(n-k)!}$  im reellen Falle gegeben. *Rogosinski (Cambridge).*

**Ganapathy Iyer, V.:** A note on the function  $\sigma(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_n^2)$ . Math. Student 5, 64—65 (1937).

Verf. gibt einen einfachen Beweis für die bekannte Tatsache, daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\sigma(r e^{i\varphi})|}{r} = \pi D |\sin \varphi|, \quad \text{für } \varphi \neq 0, \pi,$$

wenn  $n \sim D \lambda_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Dieselbe Methode ist schon von E. Lindelöf und G. Valiron (Integral Functions, S. 129, Toulouse 1923) zum Beweis eines ähnlichen, aber allgemeineren Sachverhaltes benutzt worden. *Pfluger (Solothurn).*



**Wiman, A.:** Über die Realität der Nullstellen fast aller Ableitungen gewisser ganzer Funktionen. *Math. Ann.* **114**, 617—621 (1937).

**Pólya, G.:** Über die Realität der Nullstellen fast aller Ableitungen gewisser ganzer Funktionen. *Math. Ann.* **114**, 622—634 (1937).

Let  $F(z) = \exp(-c^2 z^2) f(z)$ , where  $c \geq 0$  and  $f(z)$  is an entire function of genus zero or one, real on the real axis, and having only a finite number of non-real zeros. Wiman conjectured 20 years ago that  $F^{(n)}(z)$  has only real zeros for large  $n$ . Various special cases have been proved by Ålander, Pólya, and Wiman himself. Wiman settled the case  $f(z) = e^{cz} P(z)$ ,  $P(z)$  a polynomial. He now employs this result in an ingenious manner to prove the theorem for the case in which the reciprocals of the real zeros of  $f(z)$  can be arranged in a convergent series. Pólya elucidates the underlying ideas of Wiman's proof and shows how a quantitative use of these ideas suffices to settle case in which  $c = 0$  and  $f(z)$  is of order  $< \frac{1}{2}$  ( $\frac{1}{2}$  was the previous limit of Ålander and Pólya). *E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Fan, W. K.:** Sur les fonctions méromorphes quasi exceptionnelles. *Bull. Sci. math.*, II. s. **61**, 369—379 (1937).

L'auteur étend ses résultats antérieurs (voir ce Zbl. **14**, 25) au cas d'une fonction méromorphe  $f(z)$ .  $f(z)$  est dite quasi-exceptionnelle si la famille  $f(z, n) = f(2^n z)$  est quasi-normale dans la couronne  $(C)$ ,  $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2$ ; si l'ordre total des  $f(z, n)$  est fini, la fonction  $f(z)$  est quasi-exceptionnelle d'ordre total fini. Une fonction quasi-exceptionnelle n'admet qu'une valeur exceptionnelle de Picard au plus. [D'ailleurs, elle ne peut pas avoir deux valeurs asymptotiques distinctes (Note du Réf.).] L'étude des fonctions limites conduit l'auteur à cette proposition: La condition nécessaire et suffisante pour que  $f(z)$  soit quasi-exceptionnelle d'ordre total fini est que, de toute suite extraite de  $f(z, n)$ , on puisse extraire une autre suite  $f(z, q_n)$  telle que les équations  $f(z, q_n) = x$ ,  $x = a, b, c$  admettent  $p$  racines au plus dans  $(C)$ , les nombres distincts  $a, b, c$  pouvant varier avec la suite considérée. *G. Valiron* (Paris).

**Cartwright, Mary L.:** The exceptional values of functions with a non-enumerable set of essential singularities. *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. **8**, 303—307 (1937).

L'auteur montre que,  $f(z)$  étant méromorphe dans un domaine  $D$  sauf pour un ensemble  $E$  de points qui sont des singularités essentielles, si  $E$  est de mesure linéaire nulle,  $f(z)$  prend toute valeur sauf au plus un ensemble de mesure superficielle nulle dans le voisinage de chaque point de  $E$ . La démonstration utilise surtout des théorèmes de Koëbe et Grötzsch (voir ce Zbl. **5**, 68) sur la représentation conforme et un théorème de Besicovitch [*Proc. London Math. Soc.* (2) **32**, 1—9 (1931)] d'après lequel la fonction  $f(z)$  considérée n'est pas bornée dans le voisinage de tout point de  $E$ . L'aut. compare son résultat à ceux de Seidel, R. Nevanlinna, Gillis et Erdős (voir ce Zbl. **8**, 363; **14**, 163; **17**, 115). *G. Valiron* (Paris).

**Joh, Kenzo:** Theorems on the „schlicht“ functions. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. **19**, 1—12 (1937).

Let  $f_3(z) = z + a_1 z^4 + a_2 z^7 + \dots$  be univalent for  $|z| < 1$ ; Chen proved (*Tôhoku J.* **40**, 160; this Zbl. **11**, 29) that  $(3n + 1)^{1/3} |a_n| < 16.89 \dots$ . The author reduces this bound to 7.96  $\dots$ . — Let  $f_2(z) = z + b_1 z^3 + b_2 z^5 + \dots$  be univalent for  $|z| < 1$ . Fejér proved (*J. London Math. Soc.* **8**, 61; this Zbl. **6**, 257) that every partial sum of this series is univalent in  $|z| < 3^{-1/3}$  provided  $b_n$  is real and a certain convexity condition is satisfied for the conformal mapping  $w = f_2(z)$ . The author shows that this latter condition can be removed. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

**Müller, Max:** Zur konformen Abbildung angenähert kreisförmiger Gebiete. *Math. Z.* **43**, 628—636 (1938).

If  $w = f(z)$  [ $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ ] represents a simply connected domain whose boundary lies in  $r < |z| < 1$  on a similar domain whose boundary lies in  $r' < |w| < 1$  then  $|f(z) - z| \leq \theta F(r, r', \theta)$  for  $|z| \leq \theta r$ . A “best possible” form for  $F$  is obtained

by the (new) use of a known inequality for  $\arg f(z)/z$ . The result is compared numerically with some less exact previous results.

Macintyre (Aberdeen).

Hachoff, F.: Zur Riemannschen Randwertaufgabe. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 673—683 u. deutsch. Zusammenfassung 683 (1937) [Russisch].

The problem is the solution of the equations  $f_a(x) = c(x)f_i(x)$  and  $f_a(x) = c(x)f_i(x) + b(x)$  along a Jordan curve  $\Gamma$  by a function  $f_i(z)$  holomorphic inside  $\Gamma$  and a function  $f_a(z)$  holomorphic outside  $\Gamma$  (including infinity). The matter has been discussed before by the theory of integral equations [Privalov, Rec. math. Moscou 41, 519—526 (1935); this Zbl. 11, 311] but is here treated more completely by function theory methods based on a discussion of the integral  $\int_{\Gamma} \log c(x) dx/(z-x)$ . If  $\int_{\Gamma} d \log c(x) = 0$ , the

homogeneous equation has a unique solution (apart from a constant multiplier) and the second equation has a unique "particular" solution to which may be added any solution of the homogeneous equation. If  $\int_{\Gamma} d \log c(x) = -2n\pi i$  the only difference

is that the homogeneous equation has  $n+1$  linearly independent solutions. If  $(1/2\pi i) \int_{\Gamma} d \log c(x) > 0$  there can be no non zero solution of the homogeneous equation

but there may be a unique "singular" solution of the other.  $\Gamma$  is supposed rectifiable and  $c(x)$  to be non zero and to satisfy a Hölder condition. A generalisation to  $c(x) = (x-x_0)^n c_2(x)$  is made with little change in the results. Macintyre.

Behnke, H., und K. Stein: Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen. Jb. Deutsch. Math.-Vereinig. 47, Abt. 1, 177—192 (1937).

Revue des principaux résultats connus et démonstration de quelques résultats nouveaux concernant les problèmes dits de Cousin et Poincaré. Terminologie: domaine = ensemble (univalent) ouvert connexe de l'espace à  $n$  dim. complexes. 1<sup>er</sup> probl. de Cousin (C—1): recherche d'une f. méromorphe dans un dom. donné  $D$ , admettant dans  $D$  des infinis donnés; d'une façon précise: on donne des ouverts  $U_i$  ayant  $D$  pour réunion, et dans chaque  $U_i$  une  $f_i$  mérom., de façon que dans chaque intersection  $U_i \cap U_j$  non vide,  $f_i - f_j$  soit holomorphe; et on cherche une  $f$  mérom. dans  $D$ , telle que, dans chaque  $U_i$ ,  $f - f_i$  soit holomorphe. — 2<sup>e</sup> probl. de Cousin (C—2): recherche d'une f. holomorphe admettant des zéros donnés. Formulation analogue, sauf que les  $f_i$  données sont holom., et que dans  $U_i \cap U_j$  le quotient  $f_i/f_j$  reste fini  $\neq 0$ ; on cherche  $f$  telle que  $f/f_i$  soit fini  $\neq 0$  dans  $U_i$ . — Probl. de Poincaré (P): mettre  $f$  mérom. donnée dans  $D$  sous forme d'un quotient de 2 f. holom. dans  $D$  et premières entre elles. — La résolution de P se ramène à celle de C—2; celle de C—2 se ramène souvent à celle de C—1, mais pas toujours (Gronwall). — Classification des domaines:  $D$  est de type  $\alpha$  (ou  $\beta$ , ou  $\gamma$ ) si le probl. C—1 (ou C—2, ou P) a une solution quelles que soient les données; les négations de  $\alpha, \beta, \gamma$  seront notées  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ . Pour  $n=1$ , tout domaine est de type  $\alpha, \beta, \gamma$ . Au contraire pour  $n \geq 2$ , il y a 5 cas possibles:

$\alpha, \beta, \gamma$ ;	exemple:	$ z_i  < r_i \leq +\infty$ (Cousin);
$\alpha, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ ;	»	$0 <  z_i  < +\infty$ (Cousin et Gronwall);
$\bar{\alpha}, \beta, \gamma$ ;	»	$0 <  z_1 ^2 +  z_2 ^2 < 1,  z_i  < 1 \quad (i \geq 3)$ ;
$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma$ ;	»	$\frac{1}{2} <  z_1 ^2 +  z_2 ^2 < 1,  z_i  < 1 \quad (i \geq 3)$ ;
$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ ;	»	$0 <  z_i  < +\infty,  z_1 - 1 ^2 +  z_2 - 1 ^2 > \frac{1}{2}$ .

Les 3 autres cas ne peuvent avoir lieu, car  $\beta$  entraîne  $\gamma$  (trivial); de plus,  $\alpha$  et  $\gamma$  entraînent  $\beta$  (résultat nouveau). Quant aux 5 cas ci-dessus, leur possibilité résulte des théorèmes généraux suivants: Condition nécessaire pour  $\alpha$  ( $n=2$ ):  $D$  est domaine d'holomorphie (H. Cartan); cette condition est suffisante pour  $n$  quelconque (Oka).—



Cond. nécessaire pour  $\beta$  ( $n = 2$ ): la «Regularitätshülle»  $H(D)$  de  $D$  doit être contenue dans la fermeture de  $D$  (Thullen); cond. suffisante pour  $\beta$ : c'est que  $H(D)$  soit de type  $\beta$ , et que  $H(D) - D$  appartienne à une variété anal. à  $(n - 1)$  dim. complexes, partout régulière dans  $H(D)$  (Thullen). — Cond. nécessaire pour  $\gamma$ :  $H(D)$  doit être de type  $\gamma$  (résultat nouveau); cond. suffisante: la «Meromorphiehülle» de  $D$  est de type  $\gamma$  (trivial). — Signalons enfin (p. 191): une variété analytique à  $(n - 1)$  dim. complexes partout régulière dans  $H(D)$  a nécessairement des points dans  $D$  (conséquence du théorème d'Oka). H. Cartan (Strasbourg).

**Bergmann, Stefan:** Zur Theorie der meromorphen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. II. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 599—615 (1937).

Verf. setzt seine Untersuchungen zur Übertragung der Theorie von R. Nevanlinna auf Funktionen zweier Veränderlichen fort (Teil I s. dies. Zbl. 14, 319). An Stelle der Kreise  $|z| \leq r$  treten die Reinhardtschen Hyperflächen  $|z_2| = F(|z_1|)$ , an Stelle der isolierten  $a$ -Stellen gewisse Mittelbildungen über die  $a$ -Stellen-Flächen (s. auch H. Kneser, dies. Zbl. 16, 126). Es werden vor allem Analoga zu Aussagen, die sich um den Picard-Borelschen Satz gruppieren, aufgestellt. Behnke (Münster).

**Aravyskaya, E.:** Über ein Verfahren zur effektiven Herstellung von vollständigen Orthogonalfunktionensystemen zweier komplexer Veränderlichen. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 665—672 (1937)

Im Anschluß an eine von Stefan Bergmann angegebene Integraldarstellung für analytische Funktionen in gewissen Bereichen mit Maximumfläche (s. dies. Zbl. 9, 262 u. 16, 170) gibt Verf. für jede in einem solchen Bereich samt Rand reguläre Funktion eine Entwicklung nach Orthogonalfunktionen an. Diese Orthogonalfunktionen werden explizit konstruiert. Behnke (Münster i. W.).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen

### Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

**Huntemann, H.:** Über den mathematischen Kern des Prinzips vom ausgeschlossenen Spielsystem und eine darauf gegründete Wahrscheinlichkeitstheorie. Deutsche Math. 2, 593—622 (1937).

Für den Ref. ist nicht immer hinreichend klar ausgedrückt, was der Verf. will. Der Verf. orientiert seine Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung an dem bekannten Beispiel, bei dem aus einer Urne mit numerierten Kugeln (nach jedesmaligem Zurücklegen der entnommenen Kugel) eine Kugel herausgegriffen wird. Er geht dementsprechend von einem Merkmalsystem  $Y = (y_1, \dots, y_k)$  aus und bildet für beliebiges  $n$  alle Folgen  $S = (s_1, \dots, s_n)$ , bei denen jedes  $s_v$  ein  $y$  des Systems  $Y$  ist. Dieselbe Folge  $S$  darf sogar mehrfach, aber nur endlich oft gebildet werden. Jeder Folge  $S$  sei ein Merkmal  $\vartheta_n$  zugeordnet [ $0 \leq \vartheta_n \leq 1$ ; Beispiel:  $\vartheta_n$  = relative Häufigkeit der in  $S$  vorkommenden Zahlen  $y_1$ ]. Es sei  $v(n)$  bei gegebenem  $n$  die Anzahl aller Folgen  $S$ , jede mit ihrer Vielfachheit gezählt, und  $A(n) = A(n; z, \varepsilon)$  die Anzahl derjenigen unter den  $v(n)$  Folgen  $S$ , bei denen für gegebenes  $\varepsilon > 0$  und  $0 \leq z \leq 1$  die Ungleichung  $|\vartheta_n - z| < \varepsilon$  besteht. Kann  $z$  so gewählt werden, daß für beliebiges

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{v(n)} = 1$$

ist, so „heißt  $z$  eine Wahrscheinlichkeit [wofür?]. Wenn es eine solche Zahl gibt, gibt es nur eine solche Zahl.  $z$  ist also eindeutig bestimmt“. [Diese Definition der Wahrscheinlichkeit setzt aber doch ein fest gegebenes  $z$  voraus. Die Eindeutigkeit ist dann zwar richtig, aber so trivial, daß es keinen Sinn hat, sie zu betonen.] Die Wahrscheinlichkeit wird vom Verf. also durch das „Gesetz der großen Zahlen“ eingeführt und stützt sich auf Elemente kombinatorischer Art. Ist eine abzählbare Folge

$x_1, x_2, \dots$  von Elementen aus  $Y$  gegeben, so heißt der Versuch, aus dem sie entspringt, „ohne Nachwirkung“, wenn jedes Merkmal  $y_i$  in ihr eine Wahrscheinlichkeit in dem Sinne des Limes der relativen Häufigkeit hat [das scheint mir der Sinn der Erklärung des Verf. zu sein, wenn man von dem Beiwerk absieht]. In der „Zusammenfassung“ gibt Verf. dann als ein wesentliches Merkmal seiner Theorie an: „Wenn ein Versuch ohne Nachwirkung ist, dann läßt sich (in einem gewissen von mir präzisierten Sinne) beweisen, daß jedes Merkmal eine Wahrscheinlichkeit hat. Anders ausgedrückt: Aus der Regellosigkeit eines Versuchs folgt schon, daß jedes Merkmal eine Wahrscheinlichkeit hat.“ Bei der vom Verf. gegebenen Erklärung der Nachwirkungsfreiheit, wenn ich sie richtig verstanden habe, ist das eine Selbstverständlichkeit. — Dieser Wahrscheinlichkeitstheorie sind mehrere Sätze über „große Zahlen“ vorausgeschickt, für die wegen ihrer z. T. wohl unnötig langatmigen Voraussetzungen auf die Arbeit selber verwiesen werden muß. Falls die Theorie des Verf. trotz der Mängel der vorliegenden Darstellung einen Fortschritt in der Fundierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthalten sollte, ist eine klarere Darstellung zu wünschen. *Kamke.*

**Chapelon, Jacques:** Sur le problème de la roue. Bull. Soc. Math. France 65, 109—118 (1937).

Die  $x$ -Achse möge in gleich lange Intervalle der Länge  $\varepsilon$  eingeteilt sein. Ist dann  $f(x)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte mit der Streuung  $\sigma^2$  und  $0 \leq f(x) \leq R$ , so gilt für die Gesamtwahrscheinlichkeit  $S$  der geraden Intervalle  $2 |S - \frac{1}{2}| \leq 3(\varepsilon R/\sigma)^{2/3}$ . — Anwendung zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit von pair beim Roulettespiel bei beliebiger Wahrscheinlichkeitsverteilung der Rotationsdauer. *W. Feller.*

**Olds, C. D.:** On the remainder in the approximate evaluation of the probability in the symmetrical case of James Bernoulli's theorem. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 806—812 (1937).

In unmittelbar verständlicher Schreibweise wird im binomischen Falle mit  $p = \frac{1}{2}$  die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung  $|m - \frac{n}{2}| \leq -\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2} \sqrt{n}$  abgeschätzt durch

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\zeta} e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{\zeta^3 - \zeta}{6n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} + \Delta, \quad |\Delta| < \frac{1}{2n^2} \text{ für } n \geq 17.$$

*W. Feller (Stockholm).*

**Feldheim, E.:** Applicazioni dei polinomi di Hermite a qualche problema di calcolo delle probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 303—327 (1937).

La note contient deux parties. Dans la première l'auteur démontre quelques relations nouvelles pour les polynômes d'Hermite. A titre d'exemple nous citons la suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} H_n(x+ct) dx = \sqrt{an}(1-a)^{n/2} H_n\left(\frac{ct}{\sqrt{1-a}}\right)$$

où  $H_n$  désigne le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$ . En appliquant ces résultats l'auteur trouve les développements en séries de polynômes d'Hermite de variables aléatoires

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \\ \eta &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \end{aligned}$$

où  $x_1, x_2, \dots$  sont des variables aléatoires indépendantes. Dans la deuxième partie l'auteur donne une nouvelle démonstration d'un théorème connu concernant les conditions vérifiées par des fonctions caractéristiques et s'occupe de lois de probabilités dont les fonctions caractéristiques et les fonctions de densité de probabilité sont égales.

*Marcinkiewicz (Wilno).*

**Simonsen, William:** On the distributions of certain functions of samples from a multivariate infinite population. Skand. Aktuarie Tidskr. 20, 200—219 (1937).

Denote by  $x_1, \dots, x_n$  and  $y_1, \dots, y_n$ , two sets of random variables such that the  $x$ 's are certain single valued functions of the  $y$ 's, say  $x_i = f_i(y_1, \dots, y_n)$  with continuous partial derivatives, with the Jacobian  $\Delta = \partial(x_1, \dots, x_n)/\partial(y_1, \dots, y_n) \neq 0$



and never changing its sign. Denote by  $p_x$  and  $p_y$  the elementary probability laws of the  $x$ 's and  $y$ 's respectively. The author uses the known relation  $p_Y = |\Delta| p_X|_{x_i = f_i}$  to give an elegant way of deducing (1) the joint distribution of marginal standard deviations and correlation coefficients and (2) the joint distribution of the partial standard deviations and partial coefficients of correlation of order  $n - 2$ . In both cases the population sampled was assumed to be normal with  $n$  variates. *J. Neyman.*

**Milicer-Grużewska, H.:** On the probable error of a function of a finite number of equivalent variables. C. R. Soc. Sci. Varsovie **30**, 1—9 (1937).

Soit  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  une suite des variables aléatoires équivalentes (voir B. de Finetti, ce Zbl. 8, 217). L'auteur considère des fonctions  $f(m_{v_1}^{(n)}, m_{v_2}^{(n)}, \dots, m_{v_k}^{(n)})$  des moments empiriques

$$m_{v_i}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{v_i}$$

et démontre qu'on a, sous des hypothèses assez larges, asymptotiquement

$$E[f(m_{v_1}^{(n+g)}, m_{v_2}^{(n+g)}, \dots, m_{v_k}^{(n+g)}) - f(m_{v_1}^{(n)}, m_{v_2}^{(n)}, \dots, m_{v_k}^{(n)})] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

*A. Kolmogoroff (Moskau).*

**Brelot, M.:** Quelques difficultés dans l'application pratique de la théorie des erreurs. *Mathematica*, Cluj **13**, 243—257 (1937).

The author points out that many paradoxes in the calculus of probabilities result from the repeated neglecting of small probabilities, whose cumulative effect perhaps cannot be ignored. The practical applicability of the theory of probabilities lies in its success as a frequency theory. This success presupposes in the direct theory that the relative frequency of a specified result always lies near the theoretical limit approached. For the a posteriori theory one makes an analogous assumption with respect to the realization of a given characteristic among those events which furnish a given result. The author points out that if theoretical restrictions are introduced so as effectively to safeguard one in omitting as negligible in a series of tests probabilities which may be reasonably ignored for any one test, then the theory will fall short of what is needed in practice, and can serve only as suggestive in a program that must remain more or less experimental.

*Albert A. Bennett (Providence).*

### **Physikalische Statistik:**

**Polvani, G.:** Il diavolo e la termodinamica. *Period. Mat.*, IV. s. **17**, 189—224 (1937).

Unter dem scherzhaften Gleichnis des Teufels als Verführer, der sich schließlich doch durch seine Hörner verrät und entlarvt wird, werden verschiedene Versuche erörtert, unter Ausnutzung der Molekularbewegung ein Perpetuum mobile 2. Art zu konstruieren. Es wird 1. die Entropieänderung in dem bekannten Maxwell'schen Versuch berechnet unter der Annahme, daß von dem ersten Gas in das zweite nur Moleküle passieren können, deren Energie nicht größer ist als die mittlere Energie der Moleküle des zweiten Gases, und umgekehrt nur solche Moleküle, deren Energie nicht kleiner ist als die mittlere Energie der Moleküle des ersten Gases. Der Pferdefuß besteht in diesem Falle, wie Smoluchowski erkannt hat, darin, daß der Mechanismus, der dies bewirken soll, infolge der thermischen Schwankungen nicht funktionieren wird. Der zweite Mechanismus besteht in zwei hintereinander angeordneten Behältern, in die während einer kurzen Zeit  $\tau$  ein Molekularstrahl geschossen wird; in dem zweiten Behälter müssen sich dann nach  $\tau$  mehr schnellere Moleküle befinden als in dem ersten und daher die Temperatur im zweiten sich gegenüber der im ersten erhöhen. Auch hier wird die Entropieänderung in Abhängigkeit von  $\tau$  berechnet, wobei sich ergibt, daß nur dann eine Entropievermehrung eintritt, wenn  $\tau$  in der Größenordnung der Zeit zur Zurücklegung einer freien Weglänge der Moleküle ist. Daraus folgt, daß auch dieser Mechanismus sich in Wirklichkeit nicht ausführen läßt.

*Fürth (Prag).*

**Waldmann, Ludwig:** Über eine Verallgemeinerung der Boltzmannschen Abzählungsmethode auf das van der Waalsche Gas. *Physica*, Haag 4, 1117—1132 (1937).

Das betrachtete System bestehe aus  $N$  Teilsystemen (Molekülen), und es bedeute  $n_{ik}$  die Anzahl der Moleküle, die sich im stationären Zustand in einer bestimmten Zelle des „ $\mu$ -Phasenraumes“ befinden, wobei sich der Index  $i$  auf die Lagekoordinaten und der Index  $k$  auf die Impulskoordinaten bezieht.  $H(p, q)$  sei die Energiefunktion des Systems mit Berücksichtigung der Kräfte zwischen den Molekülen und der von den Wänden auf sie ausgeübten Kräfte. Es wird angenommen, daß das System nicht abgeschlossen sei, also keine vorgeschriebene Energie besitze und daß es der Gibbsschen Formel für die kanonische Gesamtheit genüge. Für die Wahrscheinlichkeit  $W$  eines bestimmten Makrozustandes gilt dann die Formel  $W = \frac{N!}{\prod_{ik} n_{ik}!} \frac{a}{\Delta\tau} \int_{\Delta\tau} e^{-\lambda H} d\tau$ , worin

$d\tau$  das Volumenelement des Phasenraumes und  $a$  und  $\lambda$  Konstanten bedeuten. Gesucht ist die wahrscheinlichste Verteilung  $n_{ik}^*$ , das ist also diejenige Verteilung, für die  $W$  unter der Nebenbedingung  $\sum_{i,k} n_{ik} = N$  am größten ist. Nach bekanntem Vorgehen ergibt sich der Ausdruck  $\log n_{ik}^* = -1 - \lambda_1 + \frac{\partial}{\partial n_{ik}} \log \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Delta\tau} e^{-\lambda H} d\tau$ , der ausgewer-

tet werden kann, wenn  $H(q, p)$  bekannt ist. Unter Einführung plausibler Annahmen über die Potentiale der Kräfte zwischen den Molekülen und unter der Annahme, daß das Gas genügend verdünnt sei, wird die Auswertung vorgenommen und hieraus 1. die Geschwindigkeitsverteilung und 2. die Zustandsgleichung des Gases gewonnen, die eine große Ähnlichkeit mit der van der Waalschen Gleichung hat. Fürth (Prag).

**Born, Max:** The statistical mechanics of condensing systems. *Physica*, Haag 4, 1034—1044 (1937).

In seiner Arbeit mit dem gleichlautenden Titel (vgl. dies. Zbl. 16, 89) geht J. E. Mayer von dem Phasenintegral  $Q$  des betrachteten Gases aus, aus dem sich das thermisch-mechanische Verhalten desselben gewinnen lassen muß. Es wird gezeigt, daß sich der volumenabhängige Bestandteil  $Q_v$  von  $Q$  in der Form  $\frac{Q_v}{N!} = \sum_{m_1} \prod_l \frac{(N v b_l)^{m_l}}{m_l!}$  schreiben läßt, worin  $v$  das Volumen pro Molekül und

$b_l = \frac{1}{l!} \int \dots \int \sum \prod f_{ij} d\tau, \dots d\tau_{l-1}$  ist.  $f_{ij}$  ist dabei eine Funktion von  $r_{ij}$ , dem Abstand zweier Moleküle eines Schwarmes von  $l$  Molekülen, die mit der potentiellen Energie dieser Moleküle zusammenhängt, und die Summe ist über alle möglichen Teilchwärme dieses Schwarmes zu erstrecken. Die Integrale  $b_l$  lassen sich auf gewisse irreduzible Integrale  $\beta_l$  des gleichen Typus zurückführen in der Form  $b_l = \frac{1}{l^2} \sum_{\mu_\nu} \prod_{\nu} \frac{(l \beta_\nu)^{\mu_\nu}}{\mu_\nu!}$

( $\sum \nu \mu_\nu = l - 1$ ). Beachtet man, daß sich die  $b_l$  als Koeffizienten in der Entwicklung einer komplexen Funktion von der Form  $e^{\sum_{\nu} x_\nu z^\nu}$  nach Potenzen von  $z$  auffassen lassen, dann kann man durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes diese Koeffizienten berechnen. Die asymptotische Auswertung des Integrals gelingt, wenn die Zahl  $N$  der Moleküle sehr groß ist, mit Hilfe der bekannten „Sattelwertsmethode“.

Aus  $P = -kT \frac{\partial \ln Q_v}{\partial V}$  ergibt sich schließlich unter der Annahme, daß die  $b_v$  unabhängig von  $v$  sind, die Zustandsgleichung in der Form  $\frac{PV}{RT} = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\nu+1} \frac{\beta_\nu}{v^\nu}$ . Es wird schließ-

lich noch die von Mayer versuchte Ausdehnung dieser Methode auf die Berechnung des Gleichgewichtes zwischen einer Flüssigkeit und ihrem gesättigten Dampf kritisch betrachtet. Fürth (Prag).



Elsasser, Walter M.: On quantum measurements and the rôle of the uncertainty relations in statistical mechanics. *Physic. Rev.*, II. s. 52, 987—999 (1937).

Eine statistische Gesamtheit kann quantenmechanisch nicht durch eine einzige Wellenfunktion, sondern nur durch eine Reihe von Wellenfunktionen  $\psi_1, \psi_2, \dots$  dargestellt werden, die mit den Wahrscheinlichkeiten  $r_1, r_2, \dots$  auftreten. Die  $\psi_n$  sollen alle orthogonal und normiert sein und die  $r_n$  der Normierungsbedingung  $\sum_n r_n = 1$  unterliegen. Man kann dann die „statistische Matrix“ ( $x' | \varrho | x''$ ) =  $\sum_n r_n \psi_n^*(x') \psi_n(x'')$

bilden, in der  $x$  eine Abkürzung für alle Koordinaten des Systems bedeutet. Es läßt sich dann zeigen, daß die  $r_n$  die Eigenwerte von  $\varrho$  sind. Sind ferner  $\varrho_m$  die Diagonalelemente von  $\varrho$  in irgendeiner Darstellung, dann gilt die Ungleichung  $\sum \varrho_m \log \varrho_m \leq \sum r_n \log r_n$ , worin das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn die  $\varrho_m$  eine Permutation der  $r_n$  bilden. Wird an dem System eine gewisse, beobachtbare Größe  $F$  gemessen, dann ergibt sich für ihren Erwartungswert  $\bar{F} = Sp(\varrho F)$ . Die Größe  $\eta = Sp(\varrho \log \varrho) = -\sum r_n \log r_n$  wird der „Mischungsindex“ der statistischen Matrix genannt. Um die statistische Matrix zu erhalten, die zu einer Gesamtheit gehört, an der eine Reihe von Messungen der Größen  $A_1, A_2, \dots$  mit den Resultaten  $a_1, a_2, \dots$  angestellt wurden, wird die folgende Festsetzung getroffen: Man bilde das Minimum der Größe  $\eta$  unter den Nebenbedingungen  $Sp(A_1 \varrho) = a_1, Sp(A_2 \varrho) = a_2, \dots$ . Lauten diese speziell  $Sp(H \varrho) = E, Sp(\varrho) = 1$ , worin  $H$  die Hamiltonsche Funktion des Systems ist, dann folgt  $\varrho = e^{-H/\theta} / Sp(e^{-H/\theta})$ , d. h. die kanonische Energieverteilung. Setzt man ferner ein System aus mehreren Teilsystemen  $x, y, z, \dots$  zusammen und führt die Größen  $\eta_x = Sp(\varrho_x \log \varrho_x), \dots$  ein, worin  $\varrho_x$  die Projektion von  $\varrho$  auf das Teilsystem  $x$  bedeutet, dann gilt der Satz  $\frac{d}{dt}(\eta_x + \eta_y + \dots) \leq 0$ , der als quantenmechanische Fassung des Boltzmannschen  $H$ -Theorems aufgefaßt werden kann. Fürth (Prag).

### **Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:**

● Bachelier, Louis: La spéculation et le calcul des probabilités. Paris: Gauthier-Villars 1938. VII, 51 pag. Frs. 20.—.

Die vom Verf. in seinem Lehrbuch (Calc. des Prob. Paris: Gauth.-Vill. 1912) und anderswo entwickelte Theorie des Spekulationsgeschäftes wird hier kurz zusammengefaßt. Analytische Entwicklungen und Beweise wurden zwar weggelassen, aber immerhin angedeutet. Im Kap. 1 wird die Zulässigkeit der Annahme einer Gaußschen Verteilung für die Wahrscheinlichkeit der Kursschwankungen bewiesen; ferner werden die praktischen Probleme behandelt, welche ausschließlich vom Werte des Kurses in einem bestimmten Zeitpunkt (Kap. 2) bzw. von allen während eines ganzen Intervalls vorkommenden Werten (Kap. 3) abhängen. Bruno de Finetti (Trieste).

● Boehm, C., und E. Rose: Beiträge und Deckungsrücklagen in der Lebensversicherung. (Versicherungsmath. Aufgabensamml. Hrsg. v. Deutsch. Aktuarver. H. 1.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1937. XI, 75 S. RM. 2.20.

Der größere Teil der Aufgabensammlung ist der „gemischten Versicherung“ gewidmet und will eine Brücke zwischen Theorie und Praxis sein. Zuerst werden zwölf typische Grundaufgaben, die beim Versicherungsangebote entstehen, mit Rücksicht auf bestehende Bedingungen gelöst. Weitere Aufgaben 13—20 enthalten in den Lösungen Informationen über die Gesamtleistung des Versicherungsnehmers bei verschiedenen Varianten auch mit Rücksicht auf den Einfluß der Zinsänderung, der Sterblichkeit und des Eintrittsalters. In den darauffolgenden Aufgaben werden die Einflüsse der entscheidenden Umstände auf die Nettoleistungen des Versicherers geklärt. Die Aufgaben 30—45 beschäftigen sich mit der Berechnung der „ausreichenden Prämie“ aus den verschiedenen gegebenen Elementen. Darauf werden die Grundprobleme der Berechnung der Nettodeckungsrücklage und der gezillmerten Deckungsrücklage durch ihre Lösungen vorgeführt. Die Fragen der Berechnung der „ausreichenden Prämie“

der Nettodeckungsrücklage und der gezümmerten Deckungsrücklage werden in den Aufgaben 64—75 für andere wichtige Versicherungsformen gelöst (gemischte Versicherung mit doppelter Auszahlung im Erlebensfall, mit Doppelzahlung im Todesfall, gemischte Versicherung mit zwei Auszahlungsterminen, Versicherung a terme fixe, Krisentarif, Tarif mit fallendem Beitrag, Familienversorgungsversicherung usw.). Die Probleme der Gewinnbeteiligung werden nicht erörtert. *Janko (Praha).*

● **Boehm, C., P. Lorenz und J. Staniszewski: Umwandlung von Lebensversicherungen. (Versicherungsmath. Aufgabensamml. Hrsg. v. Deutsch. Aktuarver. H. 2.)** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1937. XIV, 52 S. RM. 2.20.

Die angegebenen Lösungen der 42 Aufgaben geben Anregungen, wie man in den besonders häufig auftretenden Umwandlungsfällen von Lebensversicherungen verfahren kann, um zu einer brauchbaren Lösung zu gelangen. Wie das Verfahren in den hier nichtbehandelten Fällen abzuwandeln ist, bleibt natürlich der Gedankenarbeit des Lesers überlassen. Die 39 Umwandlungsaufgaben für Kapitalversicherungen behandeln Änderung der Versicherungssumme (Herabsetzung, Erhöhung mit oder ohne Nachzahlung), Änderung der Beitragszahlungsweise, der Versicherungsdauer, der Versicherungsform, vollständige oder teilweise Währungsänderung, Zusatzversicherungen, Auflösung der Rentenversicherung bei einer Familienversicherung, nachträglichen Einschluß der Unfalltodzusatzversicherung, Wiederbelebung und Tilgung eines Darlehns oder einer Vorauszahlung. Darauf folgen drei Umwandlungsaufgaben für Rentenversicherungen, und zwar Verlängerung resp. Verkürzung der Aufschubszeit und Änderung der Zahlungsweise einer Leibrente. Die Fragen der Gewinnbeteiligung wurden nicht in Angriff genommen. *Janko (Praha).*

## Numerische und graphische Methoden.

● **British association for the advancement of science. Mathematical tables. Vol. 6. Bessel functions. Pt. 1. Functions of orders zero and unity. Prepared by the committee for the calculation of mathematical tables.** Cambridge: Univ. press 1937: XX, 288 pag. bound 40/-.

Tafel 1 enthält die Besselschen Funktionen erster Art mit reellem Argument  $x$  nullter und erster Ordnung für Werte  $x = 0$  bis  $x = 16$  in Schritten von  $x = 0,001$ , von  $x = 16$  bis  $x = 25,00$  in Schritten von  $x = 0,01$ . Tafel 2 enthält die ersten 150 Nullstellen beider genannten Besselschen Funktionen und jeweils den Wert der anderen Funktion für die Nullstelle der einen. Diese Tafeln enthalten 10 Dezimalstellen. Tafel 3 enthält die Besselschen Funktionen zweiter Art mit reellem Argument, der Ordnungen Null und Eins, für  $x = 0$  bis  $x = 25,00$  in Schritten von  $x = 0,01$ . Diese Tafel enthält 8 Dezimalstellen. Tafel 4 enthält die ersten 50 Nullstellen der beiden letztgenannten Besselschen Funktionen und jeweils den Wert der einen Funktion für die Nullstelle der anderen, ebenfalls mit 8 Dezimalstellen. Tafel 5 enthält Hilfsfunktionen für die asymptotische Berechnung der genannten 4 Besselschen Funktionen für Argumente größer als 25,0, und zwar bis  $x = 6000$ . Tafel 6 enthält die Besselschen Funktionen erster Art der Ordnungen Null und Eins mit rein imaginärem  $x$ , und zwar für  $x = 0$  bis  $x = 5,000$  in Schritten von 0,001. Diese Tafel enthält 7 Dezimalstellen. Tafel 7 enthält die Besselschen Funktionen zweiter Art der Ordnungen Null und Eins mit rein imaginärem Argument  $x$  für Werte  $x = 0,00$  bis  $x = 5,00$  in Schritten von 0,01. Diese Tafel enthält 10 Dezimalstellen. Tafel 8 enthält Produkte von Exponentialfunktionen und den genannten Besselschen Funktionen mit rein imaginärem Argument. Tafel 9 enthält die Exponentialfunktion für  $x = 0,00$  bis  $x = 0,50$  in Schritten von 0,01 und dann bis  $x = 20,0$  in Schritten von 0,5 (8 Dezimalstellen). Die Tafel 10 enthält Interpolationswerte für die genannten Funktionen. Tafeln in dieser Ausführlichkeit lagen bisher nicht vor und sind, namentlich für astronomische Zwecke, außerordentlich wertvoll. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*



**Banachiewicz, T.:** Zur Berechnung der Determinanten, wie auch der Inversen, und zur darauf basierten Auflösung der Systeme linearer Gleichungen. *Acta Astron., Sér. c* 3, 42—67 (1937).

Die Arbeit ist eine Art Zusammenfassung früherer Arbeiten des Verf. über die Auflösung linearer Gleichungen. — Inhaltlich ist seine Methode zur Determinantenberechnung, was Verf. entgangen zu sein scheint, eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Chiò, indem die  $\text{Det} \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = \text{Det } \mathfrak{A} \cdot \text{Det}(\mathfrak{D} - \mathfrak{C}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B})$ , wo  $\mathfrak{A}, \mathfrak{D}$  quadratische Matrizen sind. Diese Formel sowie seine Formel für die Inverse einer Matrix ergibt sich aus der Zerlegung einer Matrix in ein Produkt einfacherer Matrizen:  $\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & 0 \\ 0 & \mathfrak{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} \\ 0 & \mathfrak{D}_1 \end{pmatrix}$ , nämlich:  $\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & -\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{D}_1^{-1} \\ 0 & \mathfrak{D}_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{-1} & 0 \\ -\mathfrak{C}\mathfrak{A}^{-1} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$ , wo  $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D} - \mathfrak{C}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}$ . Alle diese Formeln sind aber durchaus keine neuen, „fundamentalen“ Identitäten, sondern längst bekannt, z. B. schon von Schur (*J. reine angew. Math.* 147, 217) nebenbei benutzt. Doch scheint die Anwendung dieser Identitäten zur numerischen Berechnung der Determinanten und Inversen in der Tat wohl vom Verf. selbst zu stammen, wenngleich schon Mehrcke die damit äquivalente Methode der gleichzeitigen Elimination mehrerer Variablen empfohlen hatte (*Math. Ann.* 103, 300 ff.). — Was die Darstellung angeht, so benutzt Verf. eine besondere Art der Multiplikation von Matrizen. Werden Matrizen Kolonnen mal Kolonnen multipliziert, so nennt Verf. sie „Krakoviane“. Diese Art der Komposition hat theoretisch nur den einen Vorteil, daß die Operation des Transponierens sich als Produkt schreiben läßt:  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}\mathfrak{A}$ . Dem steht freilich der weit größere Nachteil gegenüber, daß natürlich das assoziative Gesetz nicht mehr gilt. Praktisch erfordert diese Art der Multiplikation allerdings etwas weniger Aufmerksamkeit als die gewöhnliche. Daß die sich ergebenden Formeln aber nicht, wie Verf. glaubt, typisch für die Art der Multiplikation sind, wurde schon erwähnt. — Die Bemerkung über Aitkens Arbeit (*dies. Zbl.* 16, 241) ist unverständlich. Vielleicht scheint sie zu übersehen, daß es sich nicht um ein gewöhnliches Matrizenprodukt handelt, sondern um eines mit dem Faktor  $\mathfrak{A}^{-1}$ . Bodewig (Basel).

**Zech, Theodor:** Anschauliches zur Picarditeration bei Differentialgleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* 17, 341—352 (1937).

Verf. betrachtet zunächst den einfacheren Fall der Auflösung einer Gleichung für eine unbekannte Zahl  $X$  und zeigt anschaulich, daß das Iterationsverfahren  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  um so besser konvergiert, d. h. daß die Schrittfunktion  $\varphi(x)$  um so günstiger ist, je „weniger sie von  $x$  abhängt“. — Zur geometrischen Deutung des Verfahrens der sukzessiven Approximationen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen  $\dot{x} = g(t, x)$  [Berechnung von  $x_{n+1}(t)$  aus  $x_n(t)$  nach  $\dot{x}_{n+1} = g(t, x_n)$  und  $x_{n+1}(0) = 0$ ] denke man sich auf der Kurve  $x_n(t)$  Feldelemente des durch  $\dot{x} = g$  bestimmten Richtungsfeldes angebracht. Verschiebt man, bei  $t = 0$  beginnend, der Reihe nach jedes Feldelement von  $x_n$  auf der betreffenden Ordinatenlinie, so ergeben die nach Art einer Kette aneinandergereihten Feldelemente das neue  $x_{n+1}(t)$ . Bei Beschränkung auf ein hinreichend kleines  $t$ -Intervall ist dann  $x_{n+1}(t)$  wesentlich besser als  $x_n(t)$ . Es wird eine geometrische Bedeutung der Lipschitzkonstanten angegeben und das Feld der nichtlinearen Differentialgleichung  $\dot{x} = g(t, x)$  mit einem geeigneten linearen Felde  $\dot{x} = ax + s(t)$  verglichen. Für die letztgenannte Differentialgleichung wird gezeigt, daß die Methode der sukzessiven Approximationen auf dieselbe unendliche Reihe führt wie die Methode des Heavisidekalküls. Collatz (Karlsruhe).

**Höpeke, W.:** Über die Ableitung der mittleren Fehlerellipse aus dem Fehlergesetz der Ebene. *Z. Vermessgswes.* 66, 694—698 (1937).

Die von A. Möhle (vgl. *dies. Zbl.* 15, 48) gegebene Definition des „mittleren Fehlers in einer bestimmten Richtung“ wird vom Verf. verworfen mit der Begründung, daß aus einer Auswahl von fehlerhaft bestimmten (nämlich aus den in einen unendlich schmalen Kreisausschnitt fallenden) Punkten ein mittlerer Fehler nicht gebildet

werden darf, weil diese Auswahl willkürlich ist. Projiziert man hingegen sämtliche in der Ebene möglichen Fehler (d. h. die Abstände der fehlerhaft bestimmten Punkte von dem fehlerlos bestimmten Punkte) auf eine vorgegebene Richtung, so gelangt man zu einem mittleren Fehler in dieser Richtung; hieraus wird die herkömmlich benutzte Fehlerellipse abgeleitet.

*Schmehl (Berlin).*

## Geometrie.

**Leemans, J.:** Contribution à la géométrie du triangle. *Mathesis* 51, 465—468 (1937).

**Neiss, F.:** Der Steinersche Dreispitz. *Deutsche Math.* 2, 682—685 (1937).

Bekanntlich liegen die Fußpunkte der von einem Punkt des Umkreises eines Dreiecks auf seine Seiten gefällten Lote auf einer Geraden (Simsonsche, hier Wallacesche Gerade). Werden alle zu einem Dreieck gehörigen Wallaceschen Geraden betrachtet, so umhüllen dieselben bekanntlich eine dreispitzige Hypozykloide (Steiners Dreispitz). Für diese Aussage wird hier mit elementargeometrischen Methoden und ohne Benutzung rechnerischer Hilfsmittel ein Beweis erbracht. Aus der Beweisführung ergeben sich noch weitere auf Steiner zurückgehende Aussagen. *Steck (München).*

**Yzeren, J. van:** Der „Satz von Runge“. *Nieuw Arch. Wiskde* 19, 113—128 (1938).

Das Trisektionstheorem von Morley, hier als „Satz von Runge“ bezeichnet, besagt: Wenn in einem Dreieck die jeweils einer Dreiecksseite nächstliegenden Winkeltrisektoren miteinander geschnitten werden, so bilden die drei Schnittpunkte ein gleichseitiges Dreieck. Es wird zunächst ein Beweis des Satzes gegeben, beruhend auf der Betrachtung der Sechsecke  $S_a P_b S_c P_a S_b P_c$  mit folgenden Eigenschaften:  $S_a P_b$  und  $S_a P_c$  liegen spiegelbildlich in bezug auf  $S_a P_a$ , ebenso  $S_b P_c$  und  $S_b P_a$  zu  $S_b P_b$ , ebenso  $S_c P_a$  und  $S_c P_b$  zu  $S_c P_c$ ; und die Diagonalen  $S_a P_a$ ,  $S_b P_b$ ,  $S_c P_c$  schneiden sich unter  $60^\circ$ . Von solchen Sechsecken gibt es zwei Arten: Solche mit konkurrenten Diagonalen und solche, die einem Kegelschnitt einbeschrieben werden können. Die Winkeltrisektoren eines Dreiecks bilden ein Sechseck von der ersten Art. — Sodann werden Erweiterungen des Trisektionstheorems auf die Außenwinkeltrisektoren gegeben, die sich auch bei W. L. Muir, Morley's Trisection Theorem [*Proc. Edinburgh Math. Soc.* 32 (1913)] finden.

*van der Waerden (Leipzig).*

**Narasinga Rao, A.:** The Miquel-Clifford configuration in the geometries of Möbius and Laguerre. *J. Annamalai Univ.* 7, 6—12 (1937).

In der bekannten aus  $2^{n-1}$  Kreisen und  $2^{n-1}$  Punkten bestehenden Miquel-Clifford-schen Konfiguration bilden die  $n$  durch denselben Punkt hindurchgehenden Kreise dieselben Winkel wie die  $n$  durch einen anderen beliebigen Punkt der Konfiguration hindurchgehenden Kreise. Eine ähnliche Eigenschaft besteht für die Strecken der gemeinsamen Tangenten der Kreise, die die duale Konfiguration von  $2^{n-1}$  orientierten Geraden und  $2^{n-1}$  orientierten Kreisen der Laguerreschen Geometrie bilden.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Ketchum, P. W.:** Note on an elementary geometric existence theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 835—839 (1937).

Let  $a_1, a_2 \dots a_n$  be a set of distinct points in a plane and let  $d_{ij}$  be the distance from  $a_i$  to  $a_j$ . Let  $r_i$  be any given half line, issuing from  $a_i$ . Then for every sufficiently small positive number  $\delta$ , there exists a set of points  $b_1, b_2 \dots b_n$ , satisfying the two conditions: (1)  $b_i$  is on  $r_i$ ; (2) if  $D_{ij}$  is the distance from  $a_i$  to  $b_j$  then  $d_{i,1} d_{i,2} \dots d_{i,i-1} d_{i,i+1} \dots d_{i,n} D_{i,1} D_{i,2} \dots D_{i,n} = \delta$ .

*O. Bottema (Deventer, Holl.).*

**Turrière, Émile:** De l'intégration des équations des problèmes de poursuite et d'ambiance en géométrie plane. *Bull. Soc. Math. France* 65, 168—174 (1937).

**Turrière, Émile:** Sur la chaînette élastique et la chaînette hétérogène. *An. Fac. Ci. Pôrto* 22, 5—28 (1937).

This paper consists of an investigation of the geometrical properties of the curves of equilibrium of perfectly flexible cables under the action of gravity, the stretching



of the cable being taken into account. — The following geometrical results, among others, for a cable with initial constant linear density are obtained: Geometrical constructions for the tangent, the total tension, the parameter of the cable; explicit determination of the envelope of the family of cables with varying parameter. — The cable with variable initial linear density is also investigated. The tension in such a cable at any point  $M$  is found to be equal to the weight of a second cable whose length is that of the vertical projection of the radius of curvature of the cable at  $M$  and whose linear density is the same as that of the cable at  $M$ . From this follows at once the intrinsic equation of the cable of uniform strength. The center of gravity of any arc of the cable is found to lie on a vertical line through the intersection of the tangents at the ends of the arc. — The paper includes also a derivation of the equations of an elastic cable under the action of vertical forces of various types in addition to the weight of the cable. Stoker (New York).

**Marth, Ella:** On symmetry in three dimensions. Math. Student 5, 58—63 (1937).

Es werden in dieser Arbeit Punktmengen des  $R_3$  betrachtet, die Symmetrien in sich gestatten. Diese Symmetrien können Spiegelungen an einem Punkt, einer Geraden oder einer Ebene sein. Es wird gezeigt, daß eine Menge, die ein Symmetriezentrum  $Z$  und eine Symmetrieachse durch  $Z$  besitzt, auch eine durch  $Z$  gehende Symmetrieebene senkrecht zu der Achse hat, und analoge Sätze. In diesen Fällen kann die Punktmenge endlich sein. Eine weitere Gruppe von Sätzen handelt von Mengen, die Spiegelungen an einem Punkt und einer damit nicht inzidenten Achse gestatten. Dann ist die Menge unendlich und hat unendlich viele parallele Symmetrieachsen. Dasselbe gilt, wenn 2 parallele Symmetrieebenen existieren. Burau (Hamburg).

**Chand, Hukum:** Reflection of a point in a line. Math. Student 5, 66—68 (1937).

In dieser Arbeit wird konstruktiv und rechnerisch die projektive Verallgemeinerung der Spiegelung eines Punktes der Ebene an einer Geraden gegeben. An Stelle der Kreispunkte tritt dabei ein beliebiger Kegelschnitt, der zunächst in ein Punktepaar zerfallend und dann allgemein angenommen wird. Burau (Hamburg).

**Wilkosz, W.:** Les matrices dans la théorie des espaces vectoriels. Ann. Soc. Polon. math. 15, 73—82 (1937).

Die Arbeit enthält eine Darstellung der Vektorrechnung und der zugehörigen linearen Transformationen, die die nach Ansicht des Verf. oft nicht genügend klar-gestellte verschiedene Rolle der linearen Transformationen als Basisänderung und als Affinität deutlich unterscheidet. Zuerst werden in bekannter Weise die Vektoren axiomatisch definiert, alsdann eine Vektorbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  eingeführt und für die Komponentendarstellung  $\xi = \sum e_i x_i$  die Matrizen Schreibweise  $\xi = S \cdot \xi_S$  benutzt, wo-

bei  $S$  die Matrix  $(e_1, \dots, e_n)$  und  $\xi_S$  die Matrix  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  bedeutet. Hierfür wird auch die Schreibweise  $\xi_S = \frac{\xi}{S}$  gebraucht. Dann werden die Affinitäten als lineare Vektoroperatoren  $\alpha$  erklärt, denen bei beliebiger Basis  $S$  eine gewisse Matrix  $\alpha_S$  zugeordnet ist. Der Übergang zu einer neuen Basis  $T = (f_1, \dots, f_n)$  wird dagegen in der symbolischen Gestalt  $\frac{T}{S}$  geschrieben, wo der Bruch eine Matrix vertritt und der Vektor  $\xi$  die Darstellung  $\xi = S \cdot \xi_S = T \left( \frac{T}{S} \xi_S \right)$  besitzt. Burau (Hamburg).

**Hoborski, A.:** Über Dyadensummen. Ann. Soc. Polon. math. 15, 34—36 (1937).

Der Verf. setzt die Theorie der Dyadensummen von Gibbs voraus und beweist einige Sätze, die ihm neu scheinen. Sie sind jedoch zum größten Teil bekannt [siehe J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorenrechnung, S. 241, Aufgabe 135b); J. W. Gibbs-E. B. Wilson, Vector analysis, S. 290, theorem, ferner S. 319, letzter Absatz von 122, und S. 331, exercise 17]. L. Schrutka (Wien).

**Hoborski, A.:** Über Differentialgleichungen in Vektorräumen. *Ann. Soc. Polon. math.* 15, 37—39 (1937).

Es wird gezeigt, wie man das Differentialsystem  $d\mathbf{a}_i/ds = \sum \lambda_{ik} \mathbf{a}_k$  lösen kann, indem man die Vektoren in ihre Koordinaten aufspaltet, ein partikuläres Lösungssystem herstellt und alle anderen daraus mit Hilfe von Dyadensummen (= Affinoren) herleitet.

*L. Schrutka (Wien).*

**Crudeli, Umberto:** Sulla formula di Gauss nella teoria dei campi vettoriali. *Boll. Un. Mat. Ital.* 16, 177 (1937).

This note contains remarks concerning, and references to, various proofs of Gauss' Theorem (= Green's Theorem).

*Murnaghan (Baltimore).*

### **Analytische und algebraische Geometrie:**

**Hoborski, A.:** Über spezielle Ebenen des Raumes  $R_4$ . *Ann. Soc. Polon. math.* 14, 135—141 (1936).

Il s'agit de trouver les plans de l'espace  $R_4$ , dans lesquels toute courbe est isotrope, c'est-à-dire les plans totalement isotropes. Les plans passant par un vecteur isotrope  $u_i$  sont déterminés par la propriété de contenir des vecteurs isotropes, orthogonaux à  $u_i$ , et par un procédé un peu compliqué l'auteur trouve leurs équations.

*Fr. Fabricius-Bjerre (Copenhagen).*

**Wylie jr., C. R.:** An involutorial line transformation in  $S_4$ . *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 839—847 (1937).

The transformation in question is defined as follows: Three lines  $L_1, L_2, L_3$  are given (in general position) in  $S_4$ ; a variable line  $L$  determines a line  $L'$  such that the five lines  $L_1, L_2, L_3, L, L'$  form an associated set. Corresponding to this involutory line transformation in  $S_4$  there is an involutory point transformation on the  $V_5^6$  in  $S_9$  whose points represent the lines of  $S_4$ . The author studies the effect of this transformation on particular systems of lines in  $S_4$  and determines its singular elements. These elements are the transversals of the lines  $L_1, L_2, L_3$  or of their common transversal, and the lines lying in the three  $S_3$ 's determined by pairs of the lines  $L_1, L_2, L_3$ . The lines which lie in planes meeting  $L_1, L_2, L_3$  are invariant.

*J. A. Todd.*

**Turri, T.:** Una osservazione sulla classificazione delle curve di genere due. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 25, 361—366 (1937).

Es wird gezeigt, daß in der von Rosati [Ann. Mat. pura appl., III. s. 25, 1 (1916)] gegebenen Klassifikation der Riemannschen Matrizes vom Geschlechte 2 ein von Rosati angegebener Fall nicht vorkommen kann. Daraus folgt, daß eine Kurve vom Geschlechte 2, die 3 lineare unabhängige symmetrische Korrespondenzen zuläßt, immer unendlich viele elliptische Integrale ohne komplexe Multiplikationen besitzt. Eine andere Folgerung ist, daß eine hyperelliptische algebraische Fläche vom Range 1 mit Singularitätsindex 2 niemals rein sein kann. In einem Nachwort gibt G. Scorza an, wie die Schlußweise des Autors sich unter Heranziehung der Algebrentheorie vereinfacht.

*van der Waerden (Leipzig).*

**Turpin, W. S.:** Concerning special centers of projection for an algebraic space branch. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 697—702 (1937).

Given a branch of a space algebraic curve, the projection of the branch onto a plane from a generic point  $(a, b, c)$  of the space has a certain generic composition,  $a, b$ , and  $c$  being indeterminates. For special points of the space the composition of the projection will be different from the composition of the generic projection. The purpose of the paper is to find the locus of the special centers of projection. It is found that this locus consists of  $g$  planes through the tangent line of the branch, where  $g$  is the number of characteristic pairs in the Puiseux expansion of the generic projection. Contrary to expectation, the osculating plane is not always among these  $g$  planes. The proofs are based upon a lemma concerning the composition of an algebroid branch in the  $(x, y)$ -plane, given by two power series  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

*O. Zariski.*



Todd, J. A., and E. A. Maxwell: Note on the invariants of the canonical system of an algebraic variety. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 438—443 (1937).

Let  $\Omega_0$  denote the degree of the canonical system on a  $V_d$  and let  $\Omega_i$  be the virtual arithmetic genus of the  $V_i$  intersection of  $d-i$  canonical  $V_{d-1}$ 's. Let  $\Phi_0 = \Omega_0$ ,  $\Phi_i = \Omega_i + (-1)^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d-1$ . The following relations are derived:

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i \Phi_i = 2(P_0 - 1),$$

$$\sum_{i=0}^{d-2k} (-1)^i \left( \binom{k+i-1}{i} + \binom{k+i}{i} \right) \Phi_{d-2k-i} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(d-1)$$

$d$ -odd, and

$$\sum_{i=0}^{d-2k-1} (-1)^i \binom{k+i}{i} \Phi_{d-2k-i-1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}d-1$$

$d$ -even. For  $k=0$  and  $k=\text{maximum}$  these relations are due to Severi and Segre respectively. In the proof these formulae are obtained as linear combinations of the corresponding formulae for a canonical  $V_{d-1}$  on  $V_d$ . O. Zariski (Baltimore).

Hodge, W. V. D.: On the stationary points of integrals attached to algebraic varieties. J. London Math. Soc. 12, 280—290 (1937).

Canonical systems of equivalence  $X_{p-1}$  on an algebraic  $V_m$  have been studied by Todd (this Zbl. 17, 87), who has also proved that the stationary set of points (if finite) of a Picard integral of the first kind on  $V_m$  is an  $X_0$ . In the present paper this result is proved again on the basis of the equations of the integrability conditions. The set of stationary points (if finite) of an  $(m-1)$ -fold integral is shown to be equi-

valent to  $\sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} (X_{m-1})^j X_j$ . The example (communicated by Todd) of the direct product of  $m$  curves of genera  $\geq m-1$  illustrates this general result. Zariski.

Romano, Salvatore: Clebschiano lineare di Segre. Atti Accad. Peloritana Messina 38, 49—52 (1936).

Zappalà, Attilio: Clebschiano di Segre definito da matrice nulla di forme. Atti Accad. Peloritana Messina 38, 13—17 (1936).

Fixons un certain nombre  $t$  d'espaces  $S_{h_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ), et considérons les groupes  $G = (S_{k_1}, S_{k_2}, \dots, S_{k_t})$  formés par  $t$  espaces  $S_{k_i} \subset S_{h_i}$  de dimensions  $k_i (\geq 0, \leq h_i - 1)$  données. — G. Scorza a représenté la totalité de ces groupes avec les points d'une variété  $V$  de Segre généralisée [Boll. Un. Mat. Ital. 14 (1935); ce Zbl. 13, 34], dont les coordonnées projectives homogènes  $X$  s'expriment par les différents produits qu'on obtient en multipliant une quelconque des coordonnées grassmanniennes de  $S_{k_i}$  dans  $S_{h_i}$ , par une quelconque des coordonnées grassmanniennes de  $S_{k_j}$  dans  $S_{h_j}, \dots$ , par une quelconque des coordonnées grassmanniennes de  $S_{k_t}$  dans  $S_{h_t}$ . En imposant une condition caractéristique  $(a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{ik_i})$  à  $S_{k_i}$  dans  $S_{h_i}$  (pour  $i = 1, 2, \dots, t$ ), on a des groupes  $G^* = (S_{k_1}, S_{k_2}, \dots, S_{k_t})$  particuliers, représentés de la manière indiquée avec les points d'une variété  $V^*$  appartenant à  $V$ . — Dans la première des deux Notes S. Romano détermine l'ordre de  $V^*$ , c'est-à-dire combien sont les groupes  $G^*$  dont les coordonnées  $X$  satisfont à un nombre  $n$  convenable d'équations linéaires homogènes génériques. Plus en général A. Zappalà, dans la deuxième Note, trouve combien sont les groupes  $G^*$  dont les coordonnées  $X$  annulent tous les mineurs d'ordre  $m$  qu'on peut tirer d'une matrice  $\|f_{rs}\|$  ( $r = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, m+n-1$ ), ayant par éléments des formes  $f_{rs}$  génériques de degrés  $p_r + q_s$  dans les  $X$  (où  $p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_{m+n-1}$  désignent des entiers  $\geq 0$  arbitraires). Ces résultats découlent aisément d'une formule fondamentale de H. Schubert [Mitt. math. Ges. Hamburg 3, 12 (1891)], en se servant aussi d'un travail récent de G. Giambelli [Atti Accad. Peloritana Messina 37 (1935); ce Zbl. 14, 197].

Beniamino Segre (Bologna).

## Differentialgeometrie:

**Grehn, Willibald:** Über spezielle Kreisnetze und Flächen mit speziellen rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung. Würzburg: Diss. 1937. 33 S.

**Lukschin, W.:** Zur Theorie der Verbiegung der Rotationsflächen negativer Krümmung. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 557—564 u. deutsch. Zusammenfassung 564—565 (1937) [Russisch].

En poursuivant l'étude commencée par S. Cohn-Vossen et E. Rembs (ce Zbl. 4, 309) l'auteur examine la déformation d'un morceau d'une surface de rotation à courbure négative qui correspond à une demi-sphère par parallélisme de normales et dont la première ligne limite reste plane pendant la déformation ou bien dont les points des lignes limites se déplacent sur les cylindres aux génératrices parallèles à l'axe de la surface. Dans l'un et dans l'autre cas la surface est indéformable ou admet une déformation infinitésimale suivant le choix de la méridienne. Une modification de la démonstration permet d'étendre les théorèmes au cas où le morceau déformé possède une ligne parabolique à l'intérieure. *S. Finikoff (Moscou).*

**Behari, Ram:** Curved asymptotic lines of ruled surfaces. Proc. Nat. Acad. Sci. India 7, 52—57 (1937).

Si les génératrices d'une surface gauche sont parallèles au plan  $xy$ , l'équation des asymptotiques curvilignes s'intègre. D'où suit pour deux asymptotiques arbitraires:  $\sin \theta_1 \sqrt{\sigma_1} = \sin \theta_2 \sqrt{\sigma_2}$ . Const où  $\theta_i$  est l'angle de la binormale avec l'axe de  $z$  et  $\sigma_i$  le rayon de la torsion. Il n'existe pas plus que deux asymptotiques ayant même torsion aux points situés sur les mêmes génératrices. En considérant l'expression de la courbure de la surface l'auteur étend ce théorème sur les surfaces gauches arbitraires. *S. Finikoff (Moscou).*

**Calapso, Renato:** Sui complessi lineari quasi osculatori alle asintotiche di una superficie. Atti Accad. Peloritana Messina 38, 145—155 (1937).

En poursuivant (ce Zbl. 2, 151) l'étude des complexes désignés au titre et qui contiennent 4 tangentes infiniment voisines d'une courbe  $\gamma$  (au lieu de 5 pour un complexe osculateur) l'auteur démontre le théorème inverse: Le complexe osculateur au point  $P$  d'une courbe  $\gamma$  tracée sur une surface  $S$  est en involution avec chaque complexe quasi osculateur d'une autre courbe  $\gamma'$  de  $S$  si le plan osculateur de  $\gamma$  en  $P$  coïncide avec le plan tangent de  $S$  et dans ce cas seulement. *S. Finikoff (Moscou).*

**Zito, Ciro:** Sui complessi lineari quasi oculatori alle asintotiche di una superficie. Atti Accad. Peloritana Messina 38, 169—173 (1937).

L'auteur démontre par la voie analytique le théorème de M. R. Calapso (ce Zbl. 2, 151) et montre qu'on peut choisir en complexe quasiosculateur à chaque asymptotique d'une surface  $S$  de telle manière que les directrices de la congruence linéaire qui provient de leur intersection, coïncident avec un couple arbitraire des droites conjuguées des faisceaux canoniques de  $S$ . *S. Finikoff (Moscou).*

● **Finikoff, S. P.:** Projektive Differentialgeometrie. Moskau u. Leningrad: Vereinigt. Wiss.-Techn. Verl. 1937. 263 S. [Russisch].

Das Buch enthält eine Darstellung der projektiven Differentialgeometrie und hält sich stofflich etwa in demselben Rahmen wie die Lehrbücher von Fubini und Čech. Die Methode ist von Anfang an die Cartansche in besonders angepaßter Form und ohne den Kalkül der Differentialformen. Nach einigen einleitenden Bemerkungen über Projektivitäten werden sogleich im 2. Kapitel die grundlegenden Begriffsbildungen der projektiven Differentialgeometrie wie Normalkoordinaten, Liequadrik, Wilczynski-richtungen usw. eingeführt. Es folgt eine Zusammenstellung der verschiedenen berührenden Quadriken, die es außer der Lieschen noch gibt, und die Einführung des kanonischen Büschels, in dem alle von dem Punkt der Fläche ausgehenden projektiv ausgezeichneten Richtungen enthalten sind. Besonders gründlich werden dann die



Geradenkongruenzen, insbesondere die  $W$ -Kongruenzen, in ihrer mannigfachen Beziehung zur Flächenabbildung behandelt. Es kommen auch die Abbildungen zur Sprache, die zwischen 2 Kongruenzen bestehen, wenn ihre Bildflächen in einer Flächenabbildung aufeinander bezogen sind. — Im Anhang werden dann noch die ebenen und die Raumkurven projektiv behandelt, wobei insbesondere die verschiedenen zugehörigen Berührungsgebilde aufgestellt werden.

Bureau (Hamburg).

**Haantjes, J.:** Conformal representations of an  $n$ -dimensional euclidean space with a non-definite fundamental form on itself. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 700—705 (1937).

The following generalization of Liouville's theorem is established: Any real conformal representation of an  $n$ -dimensional ( $n > 2$ ) euclidean space with a non-definite fundamental form upon itself can be performed by the product of a dilatation, an "inversion" or a "motion". The dilatation is given by  $y^* = \text{const } x^*$ , the "inversion" by  $y^* = \text{const } x^*/x^\lambda x_\lambda$ , the "motion" by  $y^* = (x^* - \frac{1}{2} x^\lambda x_\lambda b^*)/(1 - b^\lambda x_\lambda)$ , where  $b^\lambda b_\lambda = 0$ . Such a real vector  $b^*$  does not exist in ordinary euclidean space. The corresponding case for  $n = 2$  is also discussed.

Struik (Cambridge).

**Schapiro, H.:** Über die Transplantation der Kurvensysteme und der Parallelübertragung. (1. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17. — 23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 4, 296—300 (1937).

A surface  $S$  is mapped on another surface  $S^*$  in such a way that to a vector  $v^i$  in a tangent plane  $T$  to  $S$  corresponds a vector  $v^i$  in the corresponding tangent plane  $T^*$  to  $S^*$ , in such a way that the  $v^i$  are linear homogeneous expressions in the  $v^i$  and vice versa:

$$v^i = p_i^0 v^k, \quad v^k = p_k^0 v^i.$$

If a linear displacement  $\Gamma_{ij}^k$  is defined on  $S$ , the corresponding displacement is given by

$$\Gamma_{ij}^k = p_i^0 \left( \frac{\partial p_k^0}{\partial u^j} + p_i^0 \Gamma_{ij}^k \right),$$

where  $u^1, u^2$  are the curvilinear coordinates of corresponding points. Some properties of this transformation are investigated, especially in connection with conjugated nets and Tscheycheff nets.

Struik (Cambridge).

**Fialkow, Aaron:** Geometric characterizations of invariant partial differential equations. Amer. J. Math. 59, 833—844 (1937).

On a two-dimensional manifold with Riemannian metric a system of  $\infty^1$  curves  $f(x_1 x_2) = \text{const}$  is given and the 4 quantities formed:

$$\begin{aligned} \Delta_1 f &= g^{ij} f_{,i} f_{,j}; & \Delta_2 f &= g^{ij} f_{,i} f_{,j}; & \Delta_3 f &= \Delta_1 \Delta_2 - g^{ij} g^{lm} f_{,i} f_{,l} f_{,j} f_{,m}; \\ \Delta_4 f &= \frac{1}{2} g^{ij} g^{lm} f_{,il} f_{,jm} - \frac{1}{2} (\Delta_2)^2, \end{aligned}$$

of which the first two are the two Beltrami differential parameters. The author develops several properties relating to these quantities, notably the curves satisfying the equations  $\Delta_4 f = F(f)$ ;  $\Delta_4 f = 0$ ,  $(\Delta_2 + \Delta_3)f = 0$ . — Special applications are made for developable and minimal surfaces. The paper follows the ideas on intrinsic differential geometry on a surface as given e.g. by Graustein, Mém. Acad. Roy. Belgique (2) 11 (1929); Bull. Amer. Math. Soc. 36, 489—521 (1930), and which were explained in much of Ricci's early work (cf. his „Lezione sulla teoria delle superficie“, 1898).

Struik (Cambridge).

**Peters, R. M.:** Parallelism and equidistance of congruences of curves of orthogonal ennuples. Amer. J. Math. 59, 564—574 (1937).

Miss Peters, in this paper, develops some theorems relating to angular and distantal spreads of congruences of curves of orthogonal ennuples in  $n$ -dimensional Riemannian space  $V_n$  [comp. W. C. Graustein, Trans. Amer. Math. Soc. 36, 542—585

(1934) (this Zbl. 9, 409); R. Peters, Amer. J. Math. 57, 103—111 (1935) (this Zbl. 11, 82)]. Particular attention is devoted to orthogonal ennuples belonging to a sheaf, that is a totality of  $\infty^{n-1}$  congruences of which two cut under a constant angle.

*Struik* (Cambridge).

Thomas, T. Y.: Extract from a letter by E. Cartan concerning my note: On closed spaces of constant mean curvature. Amer. J. Math. 59, 793—794 (1937).

A hypersurface  $S$  of  $n$  dimensions,  $n \geq 2$ , in a Euclidean space of  $n + 1$  dimensions of constant mean curvature  $\lambda$ :

$$B_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta} \quad (B_{\alpha\beta} = \text{contracted curvature tensor})$$

is, when  $\lambda > 0$ , a space of constant curvature. In a paper Amer. J. Math. 58, 702 (1936) (this Zbl. 15, 273) the author found this theorem under the assumption that the hypersurface is closed. He now publishes a letter by E. Cartan, in which is shown that the theorem is of local character.

*Struik* (Cambridge).

Cartan, E.: Les espaces à connexion projective. (1. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 4, 147—159 (1937).

[In this abstract we use the following notation:  $P_n$  denotes a given  $n$ -dimensional space, referred to a system of coordinates  $u^1, \dots, u^n$ ;  $P$  is a general point of  $P_n$ ,  $T_n(P)$  the linear space of  $du^a$  ( $a = 1, \dots, n$ ) at  $P$ .] The idea of a projective (curved) space, developed by the author in this paper is based on two assumptions: 1) The existence of a simplex  $S(P)$  of  $n + 1$  linearly independent analytic points  $A_\alpha(P)$  ( $\alpha = 0, \dots, n$ ) in  $T_n(P)$ , such that  $A_0$  represents  $P$  itself. 2) The possibility of mapping  $S(P^*)$  in  $T_n(P^*)$  on  $T_n(P)$  whereby  $P^*$  and  $P$  are two neighboring points of  $P_n$ ,  $PP^* \rightarrow 0$ . — If  $A'_\alpha(P)$  denotes the map of  $S(P^*)$  in  $T_n(P)$  and if  $[A'_\alpha(P) - A_\alpha(P) \equiv dA_\alpha]$

$$dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, n) \quad (1)$$

then  $\omega^\beta_\alpha$  [supposed linear in  $du^a$ ] constitute the projective connection. The points  $A_\alpha$  being analytic (i. e. defined up to a factor) the projective properties based on (1) depend only on  $\omega^\beta_\alpha - \delta^\beta_\alpha \omega^0_0$  [or on  $\omega^\beta_\alpha - \frac{1}{n+1} \delta^\beta_\alpha \omega^\gamma_\gamma$ , Ref.]. If we choose another simplex

$$\bar{A}_\alpha(P) = h^\beta_\alpha A_\beta(P), \quad h^\alpha_0 = \delta^\alpha_0,$$

then we get

$$d\bar{A}_\alpha = \bar{\omega}^\beta_\alpha \bar{A}_\beta. \quad (2)$$

In order that (1) and (2) define the same connection it is necessary and sufficient that the matrices  $(\bar{\Omega})$  and  $(\Omega)$  of  $\omega^\beta_\alpha$  and  $\bar{\omega}^\beta_\alpha$  be related by

$$(\bar{\Omega}) = (H)(\Omega)(H^{-1}) + (dH)(H^{-1}),$$

where  $(H)$  is the matrix of  $h^\beta_\alpha$ . The further development (i. e. the construction of the covariant differential and covariant derivative and the related questions) was also given by author in other papers, whose abstracts are to be found in this Zbl. 9, 130; 12, 373; 15, 416. [Note: The relationship between the Princeton algorithm and Cartan's algorithm may be expressed as follows

$$du^\alpha_\gamma A^\beta_\alpha A_\beta = \omega^\delta_\gamma, \quad du^\alpha_\gamma \bar{U}^\delta_\alpha = 0 \quad (\alpha, \dots, \delta = 0, \dots, n) \quad (*)$$

where  $A_\beta$  are the hyperplanes satisfying  $A^\beta_\gamma A_\beta = \delta^\beta_\gamma$  and  $A^\beta_\gamma$  is the covariant derivative of  $A^\beta$  by Princeton's algorithm. The second of the foregoing equations (\*) shows clearly the assumption which enables Cartan to construct the covariant differential. Ref.]

*Hlavatý* (Princeton, U. S. A.).



Vyčichlo, F.: Invariants d'un champ tensoriel dans un espace projectif courbe. Čas. mat. fys. **67**, 26—61 (1937).

Let  $C(t)$  be a given curve in an  $L_n$ ,  $T \equiv T^{r_1} \dots^{r_r}$  a relative tensor given along  $C(t)$  up to an arbitrary multiplicative factor  $f(t) \neq 0$  so that  $T$  and

$$*T = Tf \quad (1)$$

are considered as equivalent. The main results of this paper may be stated as follows:

(I) If  $\sum_0^m \alpha_{m-j} T_j = 0$  (where  $T_j$  is the  $j$ -th derived tensor of  $T \equiv T_0$ ;  $2 < m \leq n^r$  and furthermore  $\alpha_0 \neq 0$ ) then a set (which is a complete set for  $m = n^r$ ) of differential invariants  $I_q$  ( $q = 2, \dots, m$ ) is found, where  $q$  designates the arithmetic weight of  $I_q$  and the  $I$ 's are invariant under (1). Furthermore  $I_q$  is of the form  $I_q \equiv I_q - L'_{q-1} + \dots$ , ( $L = \frac{\alpha}{\alpha_0}$ ), where the dots stand for the members which contain only  $L_1, \dots, L_{q-1}, L'_1, \dots, L'_{q-2}$  and the construction of  $I_q$  does not depend on the number  $m$ . (II) For  $m = n^r$  a set of relative tensors  $A_k \equiv A^{r_1} \dots^{r_r}_k$  is found for which the following "Frenet formulas" hold

$$DA_0 = A_1, \quad DA_k = A_{k+1} - \sum_1^k \binom{k}{s} I_{s+1} A_{k-s} \quad (A_{n^r} = 0) \quad (2)$$

and are independent of (1). [ $D$  is the symbol of the general absolute derivative along the given curve  $C(t)$ .] — In order to get these results, the author applies the methods introduced by the referee (this Zbl. **12**, 318 and **13**, 79). Further special cases are discussed.

Hlavatý (Princeton, N. J.).

Golab, St.: Über die affinen Invarianten einer Kurve der  $X_p$ , die in einem  $\bar{L}_n$  eingebettet ist. (1. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg **4**, 360—362 (1937).

Let  $b$  be the tangential  $p$ -vector field of a given  $X_p$  in an  $L_n$  ( $2 \leq p \leq n-1$ ),  $b = \sigma b$  and let  $b_k$  denote the  $k$ -th absolute derivative of  $b$  along a given curve  $C$  in  $X_p$ . Then there is such an integer  $m$  that  $b$  is a linear combination of  $b_1, \dots, b_m$ , i.e.

$$b = \lambda_{m+1} b_1 + \dots + \lambda_m b_m,$$

and the factor of proportionality  $\sigma$  may be normalized in such a way that  $\lambda = 0$ .

The theorem (given without proof) concerning the case  $m = 1$  and the affine curvatures of  $C$  [see Hlavatý, Rend. Circ. mat. Palermo **53**, 365—388 (1929)] seems to the referee not to be correct. A related problem is treated also by F. Vyčichlo in a totally different way (see the prec. review).

Hlavatý (Princeton, U. S. A.).

Rachevsky, P.: Die Sechseckübertragung. (1. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg **4**, 186—190 (1937).

A linear displacement with  $I_{\alpha\beta}^i = I_{\beta\alpha}^i$  is given in a two dimensional manifold. Through a point  $O$  3 geodesics  $\alpha, \beta, \gamma$  are drawn, and on  $\alpha$  a point  $A$ , on  $\beta$  a point  $B$ , on  $\gamma$  a point  $C$  are taken. Then we apply a parallel displacement of  $\beta$  and  $\gamma$  along  $\alpha$  to  $A$ , of  $\gamma$  and  $\alpha$  along  $\beta$  to  $B$ , and of  $\alpha$  and  $\beta$  along  $\gamma$  to  $C$ . We can always obtain, in this way, a hexagon about  $O$  which is closed but for infinitesimals of the 3<sup>rd</sup> order. If we postulate that the accuracy of closure should be the 4<sup>th</sup> order, we obtain preservation of area; expressed by the symmetry of the contracted curvature tensor. The author devotes his attention mainly to closure but for the 5<sup>th</sup> order, and finds that the symmetrical derivative of the contracted curvature tensor should be zero. All cases are enumerated.

Struik (Cambridge).

Michal, A. D., and D. H. Hyers: Differential invariants in a general differential geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **23**, 590—593 (1937).

Two existence theorems are stated; one for the solution of the adjoint variational system of the differential system which defines the paths in a general differential geometry with a linear connection (see this Zbl. **17**, 22), the other for the existence of a normal coordinate system.

N. Dunford (New Haven).

Lee, Hwa-Chung: On the differential geometry of contact transformations. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **40**, 695—700 (1937).

This paper deals with Schouten's papers on the differential geometry of contact transformations [Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **40**, 100—107, 236—245 (1937); this Zbl. **16**, 327]. In this theory two groups occur, one ( $\mathfrak{R}_{2n+2}$ ) consisting of the doubly homogeneous contact transformations in  $2n+2$  variables  $x^\alpha, p_\lambda$  with certain homogeneity properties, and another group ( $\mathfrak{S}$ ), of point transformations, transforming the  $x^\alpha, p_\lambda$  into multiples  $\varrho x^\alpha, \varrho p_\lambda$  where  $\varrho$  is a homogeneous function of degree 0. The present paper establishes an invariant formalism for the theory of both groups with the aid of certain projective tensors ("contact projectors"), which are subjected to a projective connection ("contact connection").

Struik (Cambridge).

Kawaguchi, Akitsugu, und Hitoshi Hombu: Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. **6**, 21—62 (1937).

This paper deals with the geometry of the set of equations

$$p_{b_1 \dots b_m}^\nu + H_{b_1 \dots b_m}^\nu(u, x, p_{(1)}, \dots, p_m) = 0 \quad (1)$$

where  $p_{b_1 \dots b_i}^\nu = \frac{\partial^i x^\nu}{\partial u^{b_1} \dots \partial u^{b_i}} (\equiv p_{(i)}^\nu)$ ,  $x^\nu$  are the coördinates of the space ( $\nu, \lambda = 1, \dots, n$ ),

$u^b$  ( $b, c = 1, \dots, k; k \leq n$ ) are independent parameters. In the first chapter the authors consider only the following transformations

$$a) \bar{x} \rightarrow x \quad \text{and} \quad b) \text{ the corresponding transf. } \bar{p} \rightarrow p \quad (2)$$

and deduce some constructions of new tensors from a given one. Example: If  $T \equiv T(x, u, p_{(1)}, \dots, p_{(s)})$  is a tensor,  $v^\nu \equiv v^\nu(u)$  a vector, then

$$\sum_{r=p}^s \binom{r}{p} T_{(a_{(p)} b_{(r-p)})}^{\nu} ;_\lambda v^\lambda / b_{(r-p)} \quad (p = 1, 2, \dots, s)$$

is a new tensor of the same kind as  $T$ . Here  $v^\lambda / b_{(t)}$  is the ordinary  $t$ -th covariant derivative with respect to the  $u$ 's,

$$T^{a(t)} ;_\lambda \equiv \frac{v_1! \dots v_u!}{t!} \frac{\partial T}{\partial p_{a_1 \dots a_t}^\lambda},$$

and it is understood that in the set  $a_1 \dots a_t$  there are  $v_1, \dots, v_u$  equal indices ( $v_1 + v_2 + \dots + v_u = t$ ). By means of this theorem the authors get a very general "covariant derivative" [under (2)a and under linear transformations of the  $u$ 's]. These results are extended in the second chapter to the case where the  $p$  in the (1) are no longer derivatives, but functions of the  $x$ 's only, which transform as described in (2)b, and  $H$  does not contain the  $u$ 's. Here again the authors confine themselves to the transformations (2), and compute the different tensors of curvature and torsion. In the third chapter the authors really solve the problem of the geometry of the equation (1) confining themselves to the case  $k=1$  and constructing not only the covariant differential but also the covariant derivative [under (2) and the general transformation  $\bar{u}^1 \rightarrow u^1$ ] of a given vector by means of the  $H$ .

Hlavatý.

### Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

Blumenthal, L. M.: Note on a theorem characterizing geodesic arcs in complete, convex metric spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 717—719 (1937).

Es wird ein Beweis für folgenden von Menger [in Untersuchungen über allgemeine Metrik, Math. Ann. **100**, 91 (1928)] versehentlich ohne Beweis ausgesprochenen



Satz gegeben: Wenn  $B$  ein Bogen in einem vollständigen konvexen metrischen Raum ist, der die beiden Punkte  $a$  und  $b$  verbindet, und wenn  $B$  die Eigenschaft hat, daß für jedes von  $a, b$  verschiedene Punktepaar  $p, q$  auf  $B$  entweder  $p$  zwischen  $a$  und  $q$  oder  $p$  zwischen  $q$  und  $b$  liegt oder  $p = q$  ist, dann ist  $B$  ein geodätischer Bogen.

H. Busemann (Princeton, N. J.).

Misès, R. de: La base géométrique du théorème de M. Mandelbrojt sur les points singuliers d'une fonction analytique. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1353—1355 (1937).

L'auteur remarque que le théorème de Mandelbrojt sur les singularités des fonctions analytiques (voir ce Zbl. 16, 308) repose sur un simple fait géométrique indépendant de la théorie des fonctions. Il établit la proposition suivante pour l'espace à  $n$  dimensions: Soient  $(P)$  un ensemble fermé de points  $P$  et  $R(M)$  le rayon de la plus grande sphère dont le centre est  $M$  et à laquelle nul point de  $(P)$  n'est intérieur. En tout point où  $R(M) \neq 0$ , la dérivée première de  $R(M)$  dans toute direction  $MX$  existe et est égale à  $-\cos \varphi$ , si  $\varphi$  désigne le plus petit angle  $PMX$  pour un  $P$  qui se trouve sur la sphère de centre  $M$  et de rayon  $R$ . Dans la démonstration, l'aut. distingue d'abord le cas simple où les points de  $(P)$  sont isolés; dans le cas général le procédé est surtout voisin de celui indiqué par le Réf. pour le théorème de Mandelbrojt (voir la Note de M. Hadamard, ce Zbl. 16, 308). [Note du Réf.: La nature géométrique du th. de Mandelbrojt résultait de la démonstration en question, des compléments apportés par A. Denjoy (voir ce Zbl. 16, 308 où le Réf. emploie la terminologie géométrique); elle fut mise explicitement en évidence (pour le cas  $n = 2$ ) par A. Denjoy dans sa seconde Note (voir ce Zbl. 17, 173) dont les résultats pourraient aussi sans doute être énoncés dans l'espace à  $n$  dimensions.] G. Valiron (Paris).

Knothe, Herbert: Über Ungleichungen bei Sehnenpotenzenintegralen. Deutsche Math. 2, 544—551 (1937).

Die in der Integralgeometrie entwickelten Rechenmethoden gestatten es, verschiedenartige Ungleichungen herzuleiten, z. B. für Sehnenpotenzintegrale, die Verf. betrachtet. Ich gebe zwei Beispiele für seine Resultate: „Unter allen konvexen Körpern gegebenen Volumens mit homogener Massenbelegung der Oberfläche besitzt die Kugel das kleinste Newtonsche Selbstpotential.“ — „Die Wahrscheinlichkeit, daß die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes zweier Geraden, deren jede einen konvexen Körper trifft, beide innerhalb des konvexen Körpers liegen, ist für jeden konvexen Körper, die Kugel ausgenommen, kleiner als  $1/2$ . Der Wert  $1/2$  wird nur von der Kugel erreicht.“

Maak (Hamburg).

Alexandroff, A.: Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. I. Verallgemeinerung einiger Begriffe der Theorie von konvexen Körpern. Rec. math. Moscou 44, 947—970 u. deutsch. Zusammenfassung 970—972 (1937) [Russisch].

Es bezeichne  $H$  einen konvexen Körper des  $n$ -dimensionalen Raumes und  $H(\bar{n})$  seine Stützfunktion als Funktion des Einheitsvektors  $\bar{n}$ . Ferner sei  $\Omega$  die Oberfläche der Einheitskugel,  $\omega$  eine Teilmenge von  $\Omega$  und  $\sigma(\omega)$  die Menge der Randpunkte von  $H$ , deren sphärisches Bild  $\omega$  ist, d. h. die Menge der Punkte, durch die es Stützebenen mit Normalenrichtungen  $\bar{n}$  aus  $\omega$  gibt. Es wird dann gezeigt: Das  $(n-1)$ -dimensionale Maß von  $\sigma(\omega)$  ist eine nichtnegative, totaladditive Mengenfunktion  $F(H, \omega)$  auf  $\Omega$ , die als Oberflächenfunktion von  $H$  bezeichnet wird. Sind  $H_1$  und  $H_2$  konvexe Körper, so gilt für das gemischte Volumen  $V(H_1, H_2, \dots, H_2)$  die Stieltjes-Radon-Integraldarstellung

$$V(H_1, H_2, \dots, H_2) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H_1(\bar{n}) F(H_2, d\omega).$$

Ferner läßt sich  $n-1$  konvexen Körpern  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$  eine gemischte Oberflächenfunktion  $F(H_1, \dots, H_{n-1}, \omega)$  zuordnen, die ebenfalls nichtnegativ und totaladditiv ist, mit der Eigenschaft, daß für jeden weiteren konvexen Körper  $H_n$

$$V(H_1, H_2, \dots, H_n) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H_n(\bar{n}) F(H_1, \dots, H_{n-1}, d\omega)$$

gilt. Die gemischte Oberflächenfunktion bleibt bei Translationen der Körper un geändert und ist in jedem einzelnen Körper positiv linear. Aus der genannten Darstellung des gemischten Volumens kann man nun ähnliche Schlüsse ziehen wie bisher aus den Summen- bzw. Integraldarstellungen der gemischten Volumina von Polyedern bzw. hinreichend glatten Körpern, z. B.

$$\int_{\Omega} \bar{n} F(H_1, \dots, H_{n-1}, d\omega) = 0$$

für jede gemischte Oberflächenfunktion. — Die gemischten Volumina und Oberflächenfunktionen lassen sich als Funktionale auffassen, die für alle Stützfunktionen definiert sind. Mit Hilfe der Bemerkung, daß jede stetige Funktion auf  $\Omega$  durch Differenzen von Stützfunktionen gleichmäßig approximiert werden kann, und des Riesz-Radonschen Satzes über lineare Funktionale zeigt der Verf., daß die gemischten Volumina und Oberflächenfunktionen zu multilinearen Funktionalen erweitert werden können, die für alle  $n$ - bzw.  $(n-1)$ -Tupel von stetigen Funktionen auf  $\Omega$  definiert sind. (Referiert nach dem deutschen Auszug.) (Vgl. auch die in Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 16 erscheinende Arbeit von W. Fenchel und B. Jessen, Mengenfunktionen und konvexe Körper.)

W. Fenchel (Kopenhagen).

### Topologie:

Kagno, I. N.: The mapping of graphs on surfaces. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 16, 46—75 (1937).

MacLane, Saunders: A structural characterization of planar combinatorial graphs. Duke math. J. 3, 460—472 (1937).

Adkisson, V. W., and Saunders MacLane: Planar graphs whose homeomorphisms can all be extended for any mapping on the sphere. Amer. J. Math. 59, 823—832 (1937).

Kuratowski (Fundam. Math. 15, 271) has shown that a graph is planar if and only if it contains neither of two graphs  $A$ ,  $B$  as subgraphs.  $A$  has two sets of three vertices, each vertex of one set joined to each vertex of the other by an arc or chain, and  $B$  has five vertices, each two joined. Kagno investigates the problem with the plane replaced by an orientable or non-orientable surface  $\Sigma_p$  or  $\mathfrak{S}_p'$  of genus  $p$ , in particular, the torus  $T$  and the projective plane  $\Pi$ . First the maps of  $A$  and  $B$  into  $\Pi$  and  $T$  are studied.  $A$  divides  $\Pi$  into one hexagonal and three quadrilateral 2-cells;  $B$  divides  $\Pi$  either into four triangles and two quadrilaterals or into five triangles and a pentagon. The situation  $A$  or  $B$  in  $T$  is similar but more complicated. It is shown that if  $G_1, \dots, G_n$  are irred. non  $\Sigma_{p_1}$ -al,  $\dots$ , non  $\Sigma_{p_n}$ -al (i.e. not mappable into these surfaces, and irreducibly so), then their (unconnected) sum is irred. non  $\Sigma_k$ -al,  $k = \Sigma p_i + n - 1$ ; the theorem holds for  $\mathfrak{S}_k$ -al with "irred." omitted. An irred. non  $\Pi$ -al graph  $G$ , with the help of a decomposition, falls into one of five types; for irred. non  $T$ -al, there are seven. In either case, a number of examples (sometimes, all possible ones) are given. The author does not know whether the number of such graphs is bounded. — MacLane considers a type of decomposition, and further conditions for the planarity, of a graph. To "split" a non-separable  $G$ , replace it by  $(H + X) + (H' + X')$ , where  $H + H' = G$ ,  $H$  and  $H'$  have only the vertices  $h_1$  and  $h_2$  in common, are non void, and are not chains, and  $X \subset H'$  and  $X' \subset H$  are chains joining  $h_1$  to  $h_2$ . If  $G$  is split as often as possible, there results a set of "atoms" and certain "branch graphs", each consisting of  $t \geq 3$  chains joining the same two vertices. The atoms are characterized as the maximal "triply connected" (t. c.) subgraphs of  $G$ . ( $G$  is t. c. if it is non-separable, cannot be split, and is neither a circuit nor a branch graph.) It is shown that  $G$  is planar if and only if its atoms are planar. (This also follows from Kuratowski's theorem, as  $A$  and  $B$  cannot be split.) The author has shown (this Zbl. 15, 375, that  $G$  is planar if and only if there is a set of circuits satisfying a certain condition. He now shows that if  $G$  is t. c., such circuits must be exactly all but the "split circuits" (i.e. those which separate the graph if



omitted). Finally, a formula for the number  $\mu(G)$  of maps of a non-separable  $G$  onto the sphere is given, in terms of the possible splits. If  $G$  is t. c.,  $\mu(G) = 1$ . — Adkisson and MacLane characterize non-separable planar graphs  $G$  such that in every map of  $G$  on the sphere, every homeomorphism of  $G$  into itself can be extended to the sphere. This is so if and only if for each split circuit  $J$  of  $G$  and every homeomorphism  $\sigma$  of  $G$  into itself such that  $\sigma(J) \neq J$ , the sets  $G - J$  and  $J \cdot \sigma(J)$  each consists of two maximal connected pieces. A more detailed theorem is also given. *H. Whitney.*

**Rutt, N. E.:** An indecomposable limit sum. *Bull. Amer. Math. Soc.* **43**, 680—685 (1937).

It is shown that if  $[D_i]$  is an increasing sequence of plane indecomposable point sets such that the set  $L = \Sigma D_i$  is a bounded continuum which is the frontier of some component of its complement in the plane, then  $L$  is also indecomposable. *Whyburn.*

**Whitney, Hassler:** Analytic coordinate systems and arcs in a manifold. *Ann. of Math.*, II. s. **38**, 809—818 (1937).

Während in einer  $\nu$ -mal stetig differenzierbaren bzw. analytischen Mannigfaltigkeit nur eine beliebig kleine Umgebung eines Punktes auf „lokale Koordinaten“ bezogen ist [vgl. *Ann. of Math.* **37**, 645—680 (1936); dies. Zbl. **15**, 320], wird in der vorliegenden Arbeit die Frage untersucht, ob es Koordinatensysteme „im großen“ mit bestimmten Eigenschaften gibt, z. B. solche, die vorgegebene Punkte, Kurvenbögen oder höherdimensionale Elemente enthalten. Die Methoden des Verf. führen unter gewissen Bedingungen zur Lösung weiterer Aufgaben: Endlich viele, in bestimmter Reihenfolge gegebene Punkte der Mannigfaltigkeit durch einen  $\nu$ -mal stetig differenzierbaren bzw. analytischen Bogen (oder auch eine geschlossene Kurve) zu verbinden. Eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $N$ , die „regulär“ und differenzierbar bzw. analytisch in eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  eingelagert ist, mit einer  $(m - n)$ -parametrischen Schar von Mannigfaltigkeiten zu umgeben, die eine Umgebung von  $N$  in  $M$  einfach und lückenlos auszufüllen. Im Anhang wird ein einfacher Beweis des Satzes angegeben, daß eine geschlossene,  $\nu$ -mal stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit  $\nu$ -mal stetig differenzierbar in einen euklidischen Raum eingebettet werden kann. *H. Seifert.*

**Čech, Eduard:** On bicom pact spaces. *Ann. of Math.*, II. s. **38**, 823—844 (1937).

Einleitend entwickelt Verf. bekannte Raum Begriffe und knüpft daran u. a. den Nachweis, daß jeder topologische Raum  $R$  ( $=$  Raum, in dem etwa für jede Menge die abgeschlossene Hülle mit den vier Kuratowskiesigenschaften erklärt ist) stetig abbildbar ist in einen vollständig regulären Raum  $S$  (topologischer Raum mit Kolmogoroff-schem Trennungsaxiom, in dem es zu jeder abgeschlossenen Menge  $F$  und jedem Punkt  $a$  von  $S - F$  eine stetige reelle Funktion gibt mit  $f(a) = 0$  und  $f(x) = 1$  für jeden Punkt  $x$  aus  $F$ ); die Topologie von  $R$  ist durch die von  $S$  so weit bestimmt, daß man die vollständige Theorie der reellen stetigen und Baireschen Funktionen in  $R$  erhält. Nach Tychonoff [*Math. Ann.* **102** (1930)] ist jeder vollständig reguläre Raum  $S$  in einem bikompakten Raum  $\beta(S)$  enthalten (ein Raum ist bikompakt, wenn für ihn der Heine-Borelsche Überdeckungssatz für jedes [auch nichtabzählbare] Überdeckungssystem gilt). Dabei ist  $\beta(S)$  eindeutig bestimmt durch folgende 2 Eigenschaften: 1.  $S$  ist dicht in  $\beta(S)$ , 2. jede beschränkte stetige reelle Funktion, definiert in  $S$ , kann stetig auf ganz  $\beta(S)$  fortgesetzt werden. Verf. studiert diesen Raum  $\beta(S)$ . Einige Resultate: Ist  $S$  normal, so kann 2. ersetzt werden durch: Je 2 fremde abgeschlossene Mengen  $\subset S$  haben in  $\beta(S)$  fremde abgeschlossene Hüllen. Genügt  $S$  dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, so ist  $S$  eindeutig bestimmt durch  $\beta(S)$  als Menge aller Punkte von  $\beta(S)$ , in denen das erste Abzählbarkeitsaxiom gilt; insbesondere ist die Topologie von  $S$  vollständig durch die von  $\beta(S)$  bestimmt. Ist  $I$  speziell der (isolierte) Raum der ganzen Zahlen, so ist  $\beta(I) - I$  ein bikompakter Raum ohne  $(\kappa)$ -Punkte [ $(\kappa)$ -Punkt  $=$  Punkt  $p$ , welcher Limes einer Folge von Punkten  $\neq p$  ist; bisher ungelöstes Problem von Alexandroff-Urysohn, *Verh. Akad. Amsterdam* **14**, 1, 54 (1929)]. Weiter wird gezeigt: Jeder metrisierbare Raum  $S$ , der ein  $G_\delta$  in  $\beta(S)$  ist, ist homöomorph einem metrischen vollständigen Raum; Verf. nennt  $S$  dann topologisch vollständig. Schließlich wird mit Hilfe der

Theorie der Räume  $\beta(S)$  bewiesen: Jeder lokal normale Raum ist eine offene Teilmenge eines normalen Raumes.

Nöbeling (Erlangen).

**Pospíšil, Bedřich:** Remark on bicomact spaces. Ann. of Math., II. s. 38, 845—846 (1937).

Es sei  $\exp \mathfrak{h} = 2^{\mathfrak{h}}$  für jede Kardinalzahl  $\mathfrak{h}$  gesetzt. Verf. beweist folgende beiden Sätze: 1. Für jede unendliche Kardinalzahl  $\mathfrak{h}$  existiert ein bikompakter Hausdorffscher Raum  $S$  und ein Teilraum  $T$  von  $S$  derart, daß gilt: 1)  $T$  ist ein isolierter Raum, 2)  $T$  ist dicht in  $S$ , d. h.  $T = S$ , 3) die Kardinalzahl von  $T$  ist  $\mathfrak{h}$ , 4) die Kardinalzahl von  $S$  ist  $\exp \mathfrak{h}$ . 2. Für einen isolierten Raum  $T$  mit unendlicher Kardinalzahl  $\mathfrak{h}$  ist die Kardinalzahl von  $\beta(T)$  gleich  $\exp \exp \mathfrak{h}$  (vgl. hierzu das vorhergeh. Ref.). Nöbeling.

**Jones, F. B.:** Concerning normal and completely normal spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 671—677 (1937).

The author first shows that every subset of power  $c$  of a separable normal Fréchet space  $L$  (or  $H$ ) has a limit point and every such set contains a limit point of itself provided the space is completely normal, i.e., if  $P$  and  $Q$  are mutually separated sets, there exist disjoint open sets containing  $P$  and  $Q$  respectively. Furthermore, if  $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$  the same conclusions hold for every uncountable subset of the same sort of spaces. An example is given to show that the hypothesis of complete normality is essential in the second of these conclusions. A space satisfying Axiom 0 and parts 1, 2, 3 of Axiom 1 of R. L. Moore's system in his "Foundations of Point Set Theory" is called a Moore space. It is shown that a Moore space has the Lindelöf property if and only if every uncountable subset of it has a limit point; and furthermore if a Moore space has this property it is a completely separable metric space. Thus if  $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$ , every separable normal Moore space is completely separable and metric. In conclusion it is shown that every normal Moore space is completely normal.

G. T. Whyburn (Virginia).

## Relativitätstheorie.

**Rumer, G.:** Über eine geometrische Deutung der Materie in der allgemeinen Relativitätstheorie. (I. internat. Konferenz f. tensorielle Differentialgeometrie u. ihre Anwendungen, Moskau, Sitzg. v. 17.—23. V. 1934.) Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 4, 105—110 (1937).

The author wishes to express the energy tensor of a continuous distribution of matter as a quadratic form in other tensors, much as the energy tensor of an electromagnetic field is expressed in terms of the electromagnetic tensor. Space-time ( $V_4$ ) may be immersed in a flat  $S_{10}$ , and when six unit vectors in  $S_{10}$  are chosen at each point of  $V_4$ , mutually orthogonal and normal to  $V_4$ , there are defined six symmetric tensors  $\overset{\alpha}{H}_{\mu\nu}$  and fifteen vectors  $\overset{\alpha\beta}{T}_\nu (= -\overset{\beta\alpha}{T}_\nu)$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$ ;  $\lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma = 1, \dots, 4$ ) in  $V_4$ . Between these and the curvature tensor of  $V_4$  there exist the Gauss-Codazzi relations, from which the author, by suitable contractions, obtains

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} R = \overset{\alpha}{D}_{\lambda\sigma} \overset{\alpha}{H}_{\mu}^{\sigma} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \overset{\alpha}{D}_{\varrho\sigma} \overset{\alpha}{H}^{\varrho\sigma}, \quad (8')$$

$$\overset{\alpha}{D}_{\mu,\sigma}^{\sigma} = \overset{\alpha\beta}{T}_{\sigma} \overset{\beta}{D}_{\mu}^{\sigma}, \quad (9')$$

$$\overset{\alpha}{H}^{\mu\nu} \left( \overset{\alpha}{H}_{\mu\varrho,\nu} - \overset{\alpha}{H}_{\mu\nu,\varrho} \right) = \overset{\alpha\beta}{T}_{\nu} \overset{\beta}{H}_{\mu\varrho}^{\varrho} \overset{\alpha}{H}^{\mu\nu} - \overset{\alpha\beta}{T}_{\varrho} \overset{\beta}{H}_{\mu\nu}^{\varrho} \overset{\alpha}{H}^{\mu\nu}, \quad (10')$$

where  $\overset{\alpha}{D}_{\mu\nu} = \overset{\alpha}{H}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \overset{\alpha}{H}$ . He defines the energy tensor  $T_{\lambda\mu}$  as the right hand side of (8'): this is, of course, in conformity with the usual field equations  $R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} R = T_{\lambda\mu}$ , but he stresses the fact that  $T_{\lambda\mu}$  defined as above satisfies the equations of conservation  $T_{\lambda,\lambda}^{\lambda} = 0$  by virtue of (9') and (10'). He regards his theory as an elastic field theory,  $\overset{\alpha}{H}_{\mu\nu}$  playing the part of deformation and  $\overset{\alpha}{D}_{\mu\nu}$  the part of stress.



He proposes to subject these tensors to the variational principle  $\delta \int D_{\mu\nu}^{\alpha} \tilde{H}^{\mu\nu} d\tau = 0$ , with (9') as associated conditions. *J. L. Synge* (Toronto).

**Le Roux, J.:** Applications de la théorie des groupes de transformations au problème de la relativité restreinte. *Ann. Soc. Polon. math.* 15, 1—23 (1937).

By considering simultaneously the Lorentz and Euclidean groups, the author is led to the conclusion that the relativistic idea of local time and the classical idea of absolute time are not mutually exclusive, as is commonly supposed, but are both needed. Certain problems necessitate the consideration of relative time, while others are most simply solved by using invariant time. Similar conclusions are reached in connexion with the notion of distance. *H. S. Ruse* (Southampton).

**Wataghin, G.:** Sulla teoria quantica della gravitazione. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 2, 361—362 (1937).

Verf. behauptet, daß die Gleichung  $V_{\mu} \alpha^{.4}_B = 0$ , wo  $\alpha^{.4}_B$  die Diracschen Matrizen sind, eine Einschränkung der Metrik des Raumes zur Folge hat. (Dies ist aber nicht der Fall. Verf. erhält eine Gleichung, die in jedem beliebigen Riemannschen Raum gültig ist und die mit Unrecht als Gravitationsgleichung bezeichnet wird. Ref.) Verf. bringt in Vorschlag, die Metrik des Raumes zu linearisieren:  $ds = \alpha_{\lambda} dx^{\lambda}$ . (Vgl. dazu Y. Mimura, dies. Zbl. 11, 231.) *J. Haantjes* (Delft).

**Reichenbächer, Ernst:** Grundzüge zu einer Theorie der Materie. *Z. Physik* 107, 285—309 (1937).

Aus dem Grundsatz, die Wellengleichung zweiter Ordnung aus Gleichungen erster Ordnung aufzubauen, ergibt sich bei Beschränkung auf die drei räumlichen Dimensionen und die eine der Zeit, sowie auf die trivialen Regeln der Arithmetik eine Theorie der Materie. Diese Theorie führt zu zwei verschiedenen Arten von Materieteilchen. Die erste Gruppe läßt sich nicht durch Wellen darstellen, erzeugt aber Schwerfelder, die zweite Gruppe zeigt alle Eigenschaften der Wellenmaterie, aber Gravitationsfelder können mit den Teilchen dieser Gruppe nicht verbunden sein. *J. Haantjes*.

**Yano, Kentaro:** Sur la théorie unitaire non holomone des champs. II. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 19, 945—976 (1937).

Die  $V_5^4$  (vgl. die erste Arbeit, dies. Zbl. 17, 333) wird mit der Raum-Zeit-Welt identifiziert. Dann bilden die  $g_{ij} = G_{ij} - \varphi_i \varphi_j$  bzw.  $\varphi_j$  das Gravitationsfeld bzw. elektromagnetische Feld. Es wird gezeigt, daß die  $V_5^4$  in der  $V_5$  geodätisch ist. Mit einem Vektor  $V^*$  der  $V_5$  korrespondiert ein Vektor  $v^h$  der  $V_5^4$  (vgl. I.). Wird nun ein Vektor der  $V_5$  pseudoparallel verschoben in die Richtung von  $v^h$ , so erhält man durch Fortsetzung dieses Prozesses eine Kurve der  $V_5^4$ . Diese Kurven werden als Weltlinien geladener Massenpunkte betrachtet. Aus einem Variationsprinzip ( $\delta \int K g^{\lambda\lambda} d\tau = 0$ ) folgen die Feldgleichungen. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird eine  $V_6$  betrachtet, die zwei gegenseitig senkrechte infinitesimale Bewegungen  $\delta x^* = \varphi^* \delta t$ ;  $\delta x^* = \psi^* \delta t$  gestattet. Die Gleichungen  $\varphi_{\lambda} dx^{\lambda} = 0$ ,  $\psi_{\lambda} dx^{\lambda} = 0$  bestimmen dann eine  $V_6^4$ . Die Weltlinien der Massenpunkte mit elektrischer Ladung  $e$  und magnetischer Intensität  $\mu$  erhält man, indem man einen Vektor  $V^*$  der  $V_6$  pseudoparallel in die Richtung seiner  $V_6^4$ -Komponente verschiebt und diesen Prozeß stetig fortsetzt. Verf. vergleicht noch seine Theorie mit der Theorie von Kaluza-Klein. *J. Haantjes* (Delft).

**Milne, E. A.:** On the equations of electromagnetism. I/II. *Proc. roy. Soc., Lond.* A 163, Nr 913, S 12—S 14 (1937).

**Mathisson, Myron:** Neue Mechanik materieller Systeme. *Acta Physica Polon.* 6, 163—200 (1937).

**Mathisson, Myron:** Das zitternde Elektron und seine Dynamik. *Acta Physica Polon.* 6, 218—227 (1937).

Die Komponenten des Maßensors in der Raum-Zeit-Welt werden als eine Summe  $g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}$  dargestellt, wobei  $\gamma_{\alpha\beta}$  als klein angenommen wird. Die Metrik  $g_{\alpha\beta}$  bildet den Untergrund. Unter bestimmten Voraussetzungen für den Untergrund haben die Gravitationsgleichungen dann die Form  $g^{\lambda\kappa} \nabla_{\lambda} \nabla_{\kappa} \psi_{\mu\nu} = -2u_{\mu\nu}$ , wo  $\psi^*_{;\lambda} = \gamma^*_{;\lambda} - \frac{1}{2} \gamma^*_{\mu} A^{\mu}_{;\lambda}$ .



und  $u_{\mu\lambda}$  der Energietensor ist. Daraus geht dann hervor, daß  $\int \sqrt{g} p_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} d\tau = 0$  ist, integriert über einem Weltgebiet  $G$ . Dabei ist  $p_{\alpha\beta} = 2V_{(\alpha} v_{\beta)}$  und  $v_\beta$  ein Vektorfeld, das außerhalb  $G$  verschwindet. Es wird nun angenommen, daß  $u_{\mu\lambda}$  außerhalb einer zeitartigen Weltröhre verschwindet. Das Integral läßt sich dann zu einem Integral längs einer Weltlinie umformen:

$$(1) \quad \int (p_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} + (V_\lambda p_{\alpha\beta}) m^{\lambda\alpha\beta} + \dots) ds = 0.$$

Diese Gleichung nennt Verf. die Variationsgleichung der Mechanik. Wird das physikalische Gebilde durch einen einfachen Pol genügend charakterisiert (Punktmasse), so darf man diese Gleichung am ersten Glied abbrechen. Berücksichtigung der ersten drei Terme ergibt für einen euklidischen Untergrund

$$(2) \quad \frac{dMu^*}{ds} + \Omega^{\kappa\lambda} \frac{d^2 u_\lambda}{ds^2} = P^\kappa.$$

Dabei ist  $\Omega^{\kappa\lambda} = -\Omega^{\lambda\kappa}$  der Drehimpuls,  $u^*$  die Vierergeschwindigkeit des Schwerpunktes und  $P^\kappa$  die Kraft. Diese neuen mechanischen Gleichungen lassen einen Energiesatz zu. Es kommt aber eine neue Art Energie, die Beschleunigungsenergie, hinzu. — In der zweiten Arbeit wird die Gleichung (2) durch ihre nichtrelativistische Approximation ersetzt. Es folgt, daß der Schwerpunkt eines isolierten ungeladenen Teilchens, welches einen Drehimpuls  $\Omega$  besitzt, eine Kreisbewegung ausführt mit der Frequenz  $\nu = \frac{Mc^2}{2\pi\Omega}$ . Das Quantengesetz hat zur Folge, daß die Phase der Zitterbewegung eines Elektrons eindeutig ist. Dies führt mit Notwendigkeit zum Wert  $\frac{h}{4\pi}$  für den Drehimpuls.

J. Haantjes (Delft).

## Astrophysik.

**Biermann, L.:** Zur Theorie der Granulation und der Wasserstoffkonvektionszone der Sonne. *Astron. Nachr.* 264, 395—398 (1938).

Die Erscheinung der Sonnengranulation wird heute wohl ziemlich allgemein auf Turbulenz in der Wasserstoffkonvektionszone der Sonne (Zone, in der die Ionisation des Wasserstoffs einsetzt) zurückgeführt. Während die Theorie von Siedentopf der WkZ. eine Dicke von  $\sim 700$  km zuschreibt und für den Energietransport in der WkZ. im wesentlichen die Strahlung heranzieht, neigt Biermann zur Auffassung, daß die WkZ. viel ausgedehnter sei ( $\sim 100000$  km) und der Energietransport in der WkZ. vorwiegend durch Konvektion erfolgt. Ausgangspunkt für Biermanns Überlegungen bilden die in neueren Beobachtungen stets auftretenden, relativ großen Granulations-elemente ( $\sim 2000$  km), die den Turbulenzelementen entsprechen sollen. Für die Dicke der turbulenten Schicht folgt dann mindestens der zehnfache Wert, also mindestens 20000 km.

ten-Bruggencate (Potsdam).

**Kiepenheuer, K. O.:** Zur Dynamik der Sonnenprotuberanzen. *Z. Astrophys.* 15, 53—68 (1938).

Die Arbeit gibt zunächst eine Zusammenstellung der wichtigsten Beobachtungstatsachen über Sonnenprotuberanzen. Für die auffallende Erscheinung, daß Fleckenprotuberanzen vom entstehenden, neuen Fleck ausgehen und in einem benachbarten, verschwindenden, alten Fleck enden, wird eine dynamische Erklärung gefunden. Sie beruht auf magnetischen Kräften, herrührend von den zeitlichen Änderungen des magnetischen Moments der Flecke, die für  $\dot{\mathfrak{H}} > 0$  (entstehender Fleck) nach außen und für  $\dot{\mathfrak{H}} < 0$  (verschwindender Fleck) nach innen gerichtet sind. Eine numerische Abschätzung der Größe der auftretenden Kräfte läßt die Deutung als möglich erscheinen. Zur Erklärung der ruhenden Protuberanzen wird angenommen, daß sie von einem permanenten Strahlungsdruck getragen werden (Kompensation der Gravitation). Erscheinungen in der Ionosphäre der Erde zwingen dazu, für die Sonne eine viel intensivere UV-Strahlung im Grenzkontinuum der Lymanserie des Wasserstoffs anzunehmen, als ihrer Temperatur von  $5700^\circ$  entsprechen würde. Dadurch gewinnt die



Vorstellung von der tragenden Wirkung des Strahlungsdrucks an Wahrscheinlichkeit. Als Ursache für eruptive Protuberanzen werden plötzliche monochromatische Lichtausbrüche in der  $L\alpha$ -Linie des Wasserstoffs angenommen. Da die plötzlich beschleunigten Gasmassen eine erhebliche Dopplerverschiebung der Absorptionslinie aufweisen, kann der Strahlungsstoß nur kurze Zeit dauern, nämlich solange die Absorptionslinie über der unverschobenen Emissionslinie liegt. Dies ermöglicht die Deutung der stückweise gleichförmigen Bewegung der eruptiven Protuberanzen, da die Wirkung der Gravitation durch den permanenten Strahlungsdruck kompensiert wird.

*ten Bruggencate (Potsdam).*

**Wellmann, Peter:** Eine angenäherte Lösung für das Streulichtfeld in einer ausgedehnten, beliebig begrenzten Sternatmosphäre. *Z. Astrophys.* 15, 32—43 (1938.)

The author shows that it is possible to reduce the equations of radiative transfer for a scattering atmosphere (which may possess arbitrary monochromatic energy sources) to the Poisson equation, when the Eddington approximation is suitably generalized. He further discusses the solution for different types of atmospheres, and shows that under certain circumstances lines should appear which are accompanied by two absorption lines at the wings. Emission lines with this property have actually been observed in the spectra of Be-stars. It also seems possible to interpret other characteristic features of the Be-spectra by means of the new theory. Another paper is promised which will give a detailed comparison of the theoretical results with observation.

*Steensholt (Oslo).*

**Mineur, Henri:** Sur l'équilibre des amas d'étoiles lorsqu'on néglige la rotation différentielle. *C. R. Acad. Sci., Paris* 205, 1213—1214 (1937).

The author gives results of a revision of his previous calculations (this *Zbl.* 16, 334) in which he now neglects the differential rotation of the galaxy, but takes account of an additional term in the gravitational potential of the galaxy. His general conclusions are not modified.

*W. H. McCrea (Belfast).*

**Vogt, H.:** Über die obere Grenze der Sternmassen. *Astron. Nachr.* 260, 281—282 (1936).

The author replies to a criticism by W. Anderson (*Publ. de l'Observatoire Astronomique de l'Université de Tartu* 29, 1) of previous work by him [*Veröff. Sternw. Jena* Nr 2 (1929)], showing in particular that Anderson has mis-interpreted the condition for a central zone devoid of energy-sources in a stellar model. [Anderson has subsequently replied to this criticism (this *Zbl.* 17, 334).]

*W. H. McCrea.*

**Rossier, P.:** Sur une simplification dans le calcul de la magnitude d'une étoile, relative à un récepteur à deux maxima de sensibilité. *C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques* 19) 54, 64—66 (1937).

**Rossier, P.:** Sur la définition des indices de couleur stellaires. *C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques* 19) 54, 74—75 (1937).

**Rossier, P.:** Sur la correction Wien-Planck dans le calcul de la magnitude d'une étoile. *C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques* 19) 54, 75—77 (1937).

**Tiercy, G., et P. Javet:** Sur la pulsation des étoiles variables du type Céphéide. *C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques* 19) 54, 80—83 (1937).

**Brill, Alfred:** Neue Methoden in der Stellarstatistik. I. Die Bestimmung der räumlichen Sternverteilung. *Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* 1937, 1—44 (Nr 2).

Das vom Verf. in früheren Arbeiten (vgl. dies. *Zbl.* 9, 237; 9, 416 u. 12, 376) entwickelte Verfahren zur Lösung der Integralgleichung der Stellarstatistik wird ausführlicher und in strengerer Form dargelegt. Die für einfache Dichtegesetze explizit angebbare isoplene absolute Helligkeit wird für alle praktisch wichtigen Fälle tabuliert; als Anwendungsbeispiel der Methode wird die räumliche Dichteverteilung der Sterne in  $+50^\circ$  galaktischer Breite abgeleitet. Die diskontinuierlichen Restfehler in der Darstellung der beobachteten Sternzahlen müssen örtlichen Schwankungen in der Verteilung der Leuchtkräfte zugeschrieben werden.

*Wempe (Heidelberg).*